UNIV.OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2009 with funding from
University of Toronto

http://www.archive.org/details/matematiskfysisk05dans

Science
X

MATHEMATISK-FYSISKE

MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

5. BIND

MED 2 TAVLER

230495
21.3.29

KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1923—24

Q
62
D28
bd. 5

INDHOLD

1. Recherches sur les Équations de Lagrange. Par Niels Nielsen.
2. Sur une formule d'addition des polynomes d'Hermite. Par J. Kampé de Fériet.
3. On the Effect of Magnetic and Electric Fields on the Mercury Spectrum. By H. M. Hansen, T. Takamine, and Sven Werner. With two plates and figures in the text.
4. Recherches sur certaines Équations de Lagrange de formes spéciales. Par Niels Nielsen.
5. Sur le genre de certaines Équations de Lagrange. Par Niels Nielsen.
6. Ein Satz über Potenzreihen unendlich vieler Variabeln mit Anwendung auf Dirichletsche Reihen. Von H. D. Kloosterman.
7. Notes supplémentaires sur les Équations de Lagrange. Étude de Niels Nielsen et Georg Rasch, publiée par Niels Nielsen.
8. The Optical Spectrum of Hafnium. By H. M. Hansen and S. Werner.
9. Über das Potential zwischen der 0.1 n und 3.5 n Kalomelelektrode. Von J. K. Gjaldbæk.
10. Undersøgelse over Gnisten ved en Kvægsølvstraalekommutator. Af Jul. Hartmann.
11. Die Dissoziationskonstante von Methylalkohol. Von Niels Bjerrum, Augusta Unmack und László Zechmeister.
12. Die Gruppe der dreidimensionalen Gittertransformationen. Von Jakob Nielsen.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. V, 1.

RECHERCHES

SUR LES

ÉQUATIONS DE LAGRANGE

PAR

NIELS NIELSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1923

AVANT-PROPOS

Lagrange, dans son cinquième supplément à l'Algèbre d'Euler, a developpé une méthode ingénieuse, dont le fondement est la détermination des valeurs rationnelles de x et y qui satisfont à l'équation indéterminée du second degré

$$y^2 = Ax^2 + B, \tag{1}$$

où A et B sont des nombres entiers donnés.

Or, l'illustre géomètre se borne au calcul numérique des valeurs de x et y, sans étudier, à un point de vue général, la nature de ces solutions, problème qui semble être resté inaperçu jusqu'ici.

En effet, Heinrich Weber, dans son Mémoire: Theorie der reellen Irrationalzahlen [1], ne cite, outre la Théorie des Nombres de Legendre, que la Table de Degen [2] et une petite Note de Cayley [3] qui donne des formules et une table numérique concernant les équations spéciales

$$y^2 - ax^2 = \pm 4. \tag{2}$$

Remarquons, en passant, que la Table de Degen a été continuée par Cayley [4] et par M. E.-E. Whitford [5].

Quant à l'équation (1), on lit, dans le Jahrbuch [6], un compte rendu si curieux qu'il faut le citer textuellement:

[1] Archiv der Mathematik und Physik (3) t. 4, p. 205; 1902.
[2] Canon Pellianus; Copenhague 1817.
[3] Journal de Crelle, t. 53, p. 369—371; 1857.
[4] Report of the British Association for the advancement of Science; 1893.
[5] The Pell Equation; New-York 1912.
[6] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 32, p. 197; 1901.

»Sind $T_x = \frac{1}{2}x(x+1)$ und $T_y = \frac{1}{2}y(y+1)$ zwei Triangularzahlen, so soll die Gleichung $T_x = nT_y$ durch ganzzahlige Werte von x und y befreidigt werden. Man setze $X = 2x+1$, $Y = 2y+1$, so kommt die Aufgabe auf die Lösung der diophantischen Gleichung $nY^2 - X^2 = n-1$ zurück. Ist ξ_r, η_r eine Lösung von $\xi^2 - n\eta^2 = 1$, so kann man X und Y in der Form darstellen:

$$X_r = \xi_r X_0 + n\eta_r Y_0\,, \quad Y_r = \xi_r Y_0 + \eta_r X_0\,,$$

wo X_0, Y_0 irgend ein der Gleichung genügendes Wertepaar, z. B. 1,1 ist.«

Les manques de précision et de clarté, que présente cette règle pour la formation des solutions de l'équation indéterminée

$$u^2 - av^2 = -(a-1) \tag{3}$$

sautent aux yeux. En premier lieu, la règle susdite est formulée avec si peu d'exactitude qu'elle donne une infinité de fois chacune des solutions qu'elle peut donner. Et, question plus grave, cette règle peut-elle donner toutes les solutions de l'équation susdite?

A cette question il faut répondre que la règle susdite ne peut donner toutes les solutions de l'équation (3) que dans le seul cas spécial $a = 3$.

En effet, une recherche plus approfondie de l'équation indéterminée du second degré

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\vartheta}\omega\,, \tag{4}$$

où a et ω sont des positifs entiers premiers entre eux, et où a n'est pas un carré exact, montre que les solutions de cette équation forment toujours, pour $\omega > 2$, au moins deux suites différentes. C'est-à-dire que la règle susdite n'est complète que pour $a = 3$.

Or, en se rappelant les nombreux comptes rendus mor-

dants, parfois injustes, des publications qui ne donnent pas des résultats nouveaux, que feu M. Lampe a donnés dans le Jahrbuch, on peut conclure que, en 1901, les fondements les plus primitifs d'une théorie générale de l'équation (4) étaient inconnus. Et l'on ne trouve rien d'une telle théorie dans la littérature postérieure á 1901.

Mes recherches sur les bases de seconde espèce, dont les facteurs premiers sont tous de la forme $4k+1$, savoir les nombres de la forme $\alpha^2+\beta^2$, où α et β sont premiers entre eux, pour lesquels l'équation

$$x^2-(\alpha^2+\beta^2)y^2=-1 \tag{5}$$

est irrésoluble, m'ont conduit à calculer les solutions des équations résolubles de la forme

$$u^2-34v^2=(-1)^\vartheta\omega, \tag{6}$$

parce que 34 est le plus petit des nombres susdits, et à étudier certaines équations de la forme (3) qui s'y rattachent. Or, les résultats ainsi obtenus sont si curieux et bizarres, d'un caractère si étrange que je me suis proposé de calculer une table des solutions des équations résolubles de la forme (4) qui correspondent aux valeurs

$$2<a<101\,,\quad 2<\omega<1000\,,$$

parce qu'une telle table donnera beaucoup d'éclaircissements curieux sur l'équation (4).

Je remarque expressément que le calcul de la Table susdite peut être effectué par des artifices spéciaux, sans appliquer la méthode assez compliquée indiquée par Lagrange, dans son cinquième supplément à l'Algèbre d'Euler. Néanmoins je propose de désigner comme équation de Lagrange une équation de la forme (4).

Dans le Mémoire présent je vais exposer les propriétés

de l'équation de Lagrange qui ont été indispensables pour mes calculs. C'est pourquoi je n'ai appliqué que des méthodes purement élémentaires, sans faire usage de la théorie des formes quadratiques, parce qu'il s'agit souvent des indices des solutions, comme éléments dans des suites, et, à ce point de vue, la méthode purement élémentaire est certainement la plus pratique.

Il est possible que la théorie des formes quadratiques donne immédiatement plusieurs des résultats que j'ai obtenus, et j'ai vu que cette théorie donnera facilement des propriétés théoriques de l'équation de Lagrange, propriétés qui sont difficiles à obtenir par la méthode purement élémentaire. Dans des publications prochaines j'exposerai des propriétés fondamentales de certaines équations de Lagrange des formes spéciales et une méthode pour la résolution numérique de telles équations.

En rédigeant mon Mémoire récent: Recherches sur l'équation de Fermat, je n'ai pas observé que les nombres ω_μ et r_μ sont bien connus, et que Degen a calculé les ω_μ qui correspondent à des valeurs de la base a au plus égales à 1000; c'est-à-dire que la plupart des résultats contenus dans le premier Chapitre de mon Mémoire susdit ne sont pas nouveaux.

Copenhague, le 16 octobre 1922.

Niels Nielsen.

CHAPITRE PREMIER

Des équations résolubles.

I. Définitions et propriétés fondamentales.

Dans ce qui suit, nous désignons comme équation de LAGRANGE une équation indéterminée de la forme

$$u^2 - av^2 = (-1)^\delta \omega, \tag{1}$$

où le positif entier a, base de l'équation, ne doit pas être un carré exact, tandis que ω, paramètre de l'équation, est un positif entier premier avec a. Quant à l'exposant δ, il est parfaitement déterminé, en vertu de (1), où a et ω sont donnés, pourvu qu'il ne puisse pas rester arbitraire.

De plus, nous disons que l'équation (1) est résoluble, pourvu qu'elle soit satisfaite par des positifs entiers u et v, premiers entre eux.

Ces définitions adoptées, on voit que l'équation de FERMAT est une équation de LAGRANGE au paramètre 1.

De plus, on voit que l'équation indéterminée

$$u^2 - 17v^2 = 4$$

est irrésoluble, bien qu'elle soit satisfaite par une infinité de valeurs paires de u et v, car le premier membre de cette équation est, pour u et v impairs, multiple de 8.

Quant à notre étude de l'équation (1), supposée résoluble, nous avons tout d'abord à indiquer la proposition évidente :

I. Supposons résoluble l'équation (1), $(-1)^{\vartheta}\omega$ est résidu quadratique d'un facteur quelconque de a; de plus, a est résidu quadratique d'un facteur quelconque de ω.

Soit ensuite, dans (1), $\omega < \sqrt{a}$, Lagrange a démontré que l'équation susdite est toujours irrésoluble, à moins que ω ne soit une des valeurs ω_r, provenues de la fraction continue de $\sqrt{a}$, de sorte que la solution complète de l'équation (1) est formée par les numérateurs et les dénominateurs de certaines réduites de la fraction continue susdite.

Or il est facile de démontrer le théorème général:

II. Soit a une base donnée quelconque, il existe une infinité de paramètres ω, pour lesquels l'équation (1) est résoluble.

En effet, soit r un résidu quadratique de a, il existe un positif entier α, tel que

$$\alpha^2 - aq = r, \tag{2}$$

et α est évidemment premier avec a, parce que r a cette propriété.

Choisissons ensuite deux positifs entiers u et v, premiers entre eux, tels que

$$u = \alpha + am, \quad u^2 = \alpha^2 + a(2\alpha m + am^2)$$
$$v^2 = p + q$$

où m et p sont des nombres entiers, puis posons

$$\omega = r + a(2\alpha m + am^2) - ap,$$

il résulte, en vertu de (2),

$$u^2 - av^2 = \omega, \tag{3}$$

et cette équation est certainement résoluble, parce que u et v, a et ω sont premiers entre eux.

Cela posé, il est évident que la proposition de Lagrange ne donne que la solution d'une partie très mince des équations résolubles qui correspondent à une base donnée a.

Quant au paramètre ω, il est facile de démontrer cette autre proposition, supplémentaire de la précédente :

III. Soit ω un paramètre donné quelconque, il existe une infinité de bases a, pour lesquelles l'équation (1) est résoluble.

En effet, choisissons un positif entier k, plus grand que ω, et premier avec ω, puis posons

$$a = k^2 - (-1)^\vartheta \omega ,$$

a est certainement un positif entier, premier avec a, qui n'est pas un carré exact; car on aura évidemment

$$(k-1)^2 < a < (k+1)^2 .$$

De plus, il est évident que l'équation

$$u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta \omega ,$$

ainsi obtenue, est résoluble, parce qu'elle est satisfaite par $u = k$, $v = 1$.

Ayant ainsi démontré l'existence des équations résolubles qui correspondent à une base donnée ou à un paramètre donné, nous avons à démontrer le théorème fondamental :

IV. Supposons résoluble l'équation (1), cette équation admet une infinité de solutions.

En effet, multiplions l'équation (1) par l'équation correspondante de Fermat

$$A_n^2 - aB_n^2 = (-1)^{nk} ,$$

où n est un indice quelconque, il résulte

$$(4) \quad (uA_n \pm avB_n)^2 - a(uB_n \pm vA_n)^2 = (-1)^{nk+\vartheta} \omega ,$$

de sorte qu'il ne nous reste qu'à démontrer que les deux carrés qui figurent au premier membre de (4) sont premiers entre eux.

Posons par exemple

$$(5) \qquad u_1 = uA_n + avB_n , \quad v_1 = uB_n + vA_n .$$

il résulte

$$(6)\quad u = (-1)^{nk}(u_1 A_n - a v_1 B_n), \quad v = (-1)^{nk}(v_1 A_n - u_1 B_n),$$

de sorte que u_1 et v_1 sont premiers entre eux, pourvu que u et v le soient, et inversement.

Remarquons encore que la formule (4) donnera immédiatement cette autre proposition:

V. Soit a une base de première espèce, les deux équations indéterminées

$$(7)\qquad u^2 - a v^2 = +\omega, \quad u^2 - a v^2 = -\omega$$

sont en même temps résolubles ou non.

En effet, k étant un nombre impair, parce que a est une base de première espèce, il est évident que le second membre de (4) a pour n pair ou impair, des signes différents; c'est pourquoi nous écrivons, dans ce cas,

$$u^2 - a v^2 = \pm\omega$$

au lieu des deux équations (7).

Or, cette condition suffisante pour la résolubilité simultanée des équations (7) n'est pas nécessaire, car on aura par exemple

$$7^2 - 34 \cdot 1^2 = 15, \quad 11^2 - 34 \cdot 2^2 = -15,$$

bien que $34 = 6^2 - 2$ soit une base de seconde espèce. Dans une publication prochaine, nous avons à revenir aux équations de ce genre.

En terminant ce premier article, nous avons encore à démontrer une proposition qui nous sera souvent utile, dans ce qui suit, savoir:

VI. Supposons résoluble une des quatre équations indéterminées

$$(8)\quad \begin{cases} u^2 - a v^2 = -(4k+2), & u^2 - a v^2 = 4k+2, \\ u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta}(8k+4), & u^2 - a v^2 = (-1)^{\varepsilon} 8k, \end{cases}$$

les trois autres sont toujours irrésolubles.

En effet, u et v étant tous deux impairs dans chacune des équations en question, u^2 et v^2 sont de la forme $8\sigma+1$, de sorte que la première des équations (8) n'est pas résoluble, à moins que $a=8\nu+3$, tandis que la deuxième des équations susdites exige $a=8\nu+7$; c'est-à-dire que les deux équations en question se présentent sous la forme commune

(9) $$u^2-av^2=(-1)^{\nu-1}(4k+2), \quad a=4\nu+3.$$

Quant aux deux dernières des équations (8), on aura respectivement $a=8\nu+5$, $a=8\nu+1$.

II. Des suites de solutions.

Revenons maintenant à l'équation générale de Lagrange

(1) $$u^2-av^2=(-1)^{\vartheta}\omega,$$

nous avons tout d'abord à démontrer le théorème:

I. Une solution quelconque de l'équation (1), supposée résoluble, est toujours élément d'une suite infinie de solutions

(2) $$(u_1, v_1),\ (u_2, v_2),\ \ldots,\ (u_n, v_n),\ \ldots$$

formées successivement à l'aide des formules récursives

(3) $$u_{n+1}=u_nA_1+av_nB_1, \quad v_{n+1}=u_nB_1+v_nA_1.$$

On voit que ce théorème est une conséquence immédiate de la formule (4) de l'article précédent.

Or, les équations (3) donnent, résolues par rapport à u_n et v_n,

(4) $$(-1)^k u_n=u_{n+1}A_1-av_{n+1}B_1, \quad (-1)^k v_n=v_{n+1}A_1-u_{n+1}B_1,$$

où nous avons posé, comme ordinairement,

(5) $$A_1^2-aB_1^2=(-1)^k.$$

Cela posé, il est évident que les deux différences

$$u_nA_1-av_nB_1, \quad v_nA_1-u_nB_1$$

ont toujours le même signe, pourvu que $n > 1$; mais pour $n = 1$ cela ne peut pas avoir lieu.

En effet, supposons que les différences

(6) $u_1 A_1 - a v_1 B_1 = (-1)^\mu \alpha\,, \quad v_1 A_1 - u_1 B_1 = (-1)^\mu \beta$

aient toutes deux le même signe, puis remarquons que (α, β) est une solution de l'équation (1), nous aurons, en vertu de (6),

$$(-1)^{k+\mu} u_1 = \alpha A_1 + a\beta B_1\,, \quad (-1)^{k+\mu} v_1 = \alpha B_1 + \beta A_1\,,$$

ce qui donnera nécessairement $\mu = k$, et (α, β) est donc une solution de la suite (2) qui précède le premier élément (u_1, v_1) de cette suite, ce qui est impossible.

Les deux différences

$$u_1 A_1 - a v_1 B_1\,, \quad u_1 B_1 - v_1 A_1$$

ont donc le même signe, et il existe par conséquent un exposant δ tel que les nombres s_1 et t_1 définis par les expressions

(7) $(-1)^\delta s_1 = u_1 A_1 - a v_1 B_1\,, \quad (-1)^\delta t_1 = u_1 B_1 - v_1 A_1$

sont tous deux positifs, et je dis que cet exposant δ est précisément celui qui figure dans l'équation

(8) $$u_1^2 - a v_1^2 = (-1)^{\delta_1} \omega.$$

En effet, résolvons par rapport à A_1 et B_1 les deux équations (7), il résulte, en vertu de (8),

(9) $$\omega A_1 = s_1 u_1 + a t_1 v_1\,, \quad \omega B_1 = s_1 v_1 + t_1 u_1\,,$$

tandis que les formules (7) et (8) donnent

(10) $$s_1^2 - a t_1^2 = (-1)^{k+\delta_1} \omega\,,$$

de sorte que (s_1, t_1) est aussi une solution de l'équation (1).

Quant à cette solution (s_1, t_1), deux cas seulement sont possibles, savoir :

1° Les deux solutions (u_1, v_1) et (s_1, t_1) sont identiques. Dans ce cas, nous désignons comme fermée la suite (2).

2° Les deux solutions (u_1, v_1) et (s_1, t_1) sont différentes. Dans ce cas, (s_1, t_1) est le premier élément d'une autre suite

$$(11) \qquad (s_1, t_1),\ (s_2, t_2),\ \ldots,\ (s_n, t_n),\ \ldots$$

de solutions de l'équation (1), et nous aurons, en vertu de (7),

$$(12)\quad (-1)^{k+\delta_1} u_1 = s_1 A_1 - a t_1 B_1, \quad (-1)^{k+\delta_1} v_1 = s_1 B_1 - t_1 A_1.$$

Dans ce qui suit, nous désignons comme réciproques les deux solutions (s_1, t_1) et (u_1, v_1) et comme coordonnées les deux suites (2) et (11), dont les premiers éléments sont les solutions réciproques susdites.

Considérons maintenant une suite quelconque de solutions de l'équation indéterminée (1), ses premiers éléments sont généralement très irrégulièrement distribués parmi les solutions de l'équation correspondante de Fermat; mais, à compter d'un certain indice, cette irrégularité disparaîtra, comme le montrent clairement les deux lemmes suivants:

II. Soit (u, v) une solution quelconque de l'équation (1) et soit $2A_{n-1} > \omega$, les deux inégalités

$$(13) \qquad A_n > u > A_{n-1}$$

entraînent nécessairement ces deux autres

$$(14) \qquad B_n > v > B_{n-1}.$$

On aura en effet

$$u^2 - A_{n-1}^2 = a(v^2 - B_{n-1}^2) + (-1)^\delta \omega = (-1)^{nk-k},$$

et l'inégalité évidente $u \geqq A_{n-1} + 1$ donnera

$$u^2 - A_{n-1}^2 \geqq 2A_{n-1} + 1 > \omega + 1,$$

de sorte que l'on aura nécessairement $v > B_{n-1}$, et l'on démontrera, par le même procédé, que l'inégalité $A_n > u$ entraîne $B_n > v$.

Supposons maintenant satisfaites les inégalités (13) et (14), supplées peut-être par une des égalités

$$u = A_{n-1}, \quad v = B_{n-1},$$

nous disons pour abréger que la solution (u, v) est située dans l'intervalle I_n, ou appartient à cet intervalle, ou que l'intervalle I_n contient la solution (u, v).

Cela posé, il est facile de démontrer le second des lemmes susdits:

III. Il existe, pour une suite quelconque des solutions de l'équation (1), un indice n, tel que l'intervalle I_n contient précisément un élément (u_m, v_m) de la suite, et l'élément (u_{m+p}, v_{m+p}) appartient à l'intervalle I_{n+p}, quel que soit l'indice p.

En effet, les inégalités simultanées

$$A_n > u_m \geq A_{n-1}, \quad B_n > v_n \geq B_{n-1},$$

où les signes d'égalité ne sont pas tous deux applicables, donnera, en vertu des formules récursives générales (3),

$$A_{n+p} > u_{m+p} > A_{n+p-1}, \quad B_{n+p} > v_{m+p} > B_{n+p-1};$$

c'est-à-dire que l'élément (u_{m+p}, v_{m+p}) est situé dans l'intervalle I_{m+p}.

Dans ce qui suit, nous désignons comme irrégulière une solution (u, v) de l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^p \omega,$$

pourvu qu'elle n'appartienne à aucun des intervalles I_n.

De plus, soient (u, v) et (u_1, v_1) deux solutions de l'équation susdite, nous écrivons

$$(u, v) > (u_1, v_1),$$

pourvu que ou $u > u_1$ ou $u = u_1$, mais $v > v_1$.

III. Des suites fermées et du paramètre 2.

Revenons maintenant aux formules (7) de l'article précédent, puis supposons identiques les deux solutions (s_1, t_1) et (u_1, v_1) de l'équation de Lagrange

(1) $$u^2 - av^2 = (-1)^\varepsilon \omega,$$

nous aurons, en remplaçant l'exposant δ_1 par δ,

(2) $$av_1 B_1 = u_1(A_1 - (-1)^\delta), \quad u_1 B_1 = v_1(A_1 + (-1)^\delta).$$

Multiplions ensuite les deux équations (2), il résulte

(3) $$A_1^2 - aB_1^2 = 1,$$

de sorte que la base a est nécessairement de seconde espèce.

Quant aux équations (2), remarquons que u_1 est premier et avec a et avec v_1, il est évident que B_1 est divisible par le produit $u_1 v_1$. Posons donc

(4) $$B_1 = k u_1 v_1,$$

où k est un positif entier, il résulte, en vertu de (2),

(5) $$akv_1^2 = A_1 - (-1)^\delta, \quad ku_1^2 = A_1 + (-1)^\delta,$$

ce qui donnera

(6) $$akv_1^2 = ku_1^2 - (-1)^\delta 2,$$

équation qui est impossible, à moins que

$$k = 1, \quad k = 2.$$

Or, la dernière de ces valeurs est inadmissible, parce que (u, v) n'est pas une solution de l'équation de Fermat ayant la base a; c'est-à-dire que l'équation (6) se présente sous la forme

(7) $$u_1^2 - av_1^2 = (-1)^\delta 2.$$

De plus, on aura, en vertu de la proposition VI de l'article I,

(8) $$a = 4\nu + 3, \quad \delta = \nu - 1.$$

Introduisons maintenant, dans les formules (4) et (5), la seule valeur possible $k = 1$, il résulte

$$A_1 = u_1^2 - (-1)^\delta, \quad B_1 = u_1 v_1,$$

formules qui déterminent parfaitement les nombres u_1 et v_1, et nous aurons évidemment

$$A_1 > u_1, \quad B_1 \geq v_1,$$

de sorte que la solution générale (u_n, v_n) de la suite fermée en question appartient, quel que soit l'indice n, à l'intervalle I_n.

Cela posé, prenons pour point de départ l'équation de Lagrange (7), savoir

$$u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta 2, \tag{9}$$

supposée résoluble, puis désignons par (s, t) et (u, v) deux solutions quelconques de cette équation, savoir

$$s^2 - at^2 = (-1)^\vartheta 2, \quad u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta 2, \tag{10}$$

je dis que les nombres x_1 et y_1, x_2 et y_2 définis par les expressions

$$2x_1 = su + atv, \qquad 2y_1 = sv + tu \tag{11}$$

$$2x_2 = |su - atv|, \quad 2y_2 = |sv - tu| \tag{12}$$

satisfont à l'équation de Fermat

$$x^2 - ay^2 = 1. \tag{13}$$

En effet, multiplions les deux équations (10), il résulte

$$(su + atv)^2 - a(sv + tu)^2 = 4,$$

ce qui conduira immédiatement au résultat susdit, parce que les nombres s et t, u et v sont tous impairs.

Soit particulièrement $s = u$, $t = v$, on aura

$$x_1 = u^2 - (-1)^\vartheta, \quad y_1 = uv, \tag{14}$$

résultats qui conduiront à la proposition essentielle:

I. Soit (u_n, v_n) l'élément général d'une suite fermée appartenant à l'équation de Lagrange (9), on aura, quel que soit l'indice n,

$$A_{2n-1} = u_n^2 - (-1)^\vartheta, \quad B_{2n-1} = u_n v_n. \tag{15}$$

Remarquons que la solution (u_n, v_n) appartient à l'intervalle I_n, nous aurons

$$A_{n-1}^2 + aB_{n-1}^2 < u_n^2 + av_n^2 < A_n^2 + aB_n^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

(16) $$\frac{A_{2n-1}}{2} < u_n^2 - (-1)^\vartheta < \frac{A_{2n}}{2}.$$

Or, la formule récursive de LAGRANGE

$$A_{m+1} = A_1 A_m + a B_1 B_m$$

donne, en vertu de la condition évidente $A_1 \geq 2$,

$$A_{m+1} > 2 A_m,$$

de sorte que les inégalités (16) se présentent sous cette autre forme

$$A_{2n-3} < u_n^2 - (-1)^\vartheta < A_{2n-1},$$

et les formules (15) sont évidentes, car B_{2n-2} est pair.

Cela posé, il est évident qu'aucun des intervalles I_n ne peut contenir plus d'une seule solution de l'équation (9), ce qui donnera cette autre proposition:

II. Supposons résoluble l'équation de LAGRANGE (9), l'ensemble de ses solutions forme précisément une suite fermée.

Ce résultat est bien connu.

En effet, prenons pour point de départ la fraction continue

(17) $$\sqrt{a} = [a, (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{\mu-1}, 2a)],$$

puis désignons par

$$\frac{y_0}{z_0}, \frac{y_1}{z_1}, \frac{y_2}{z_2}, \ldots.$$

les réduites de cette fraction continue, nous aurons généralement

(18) $$u_n = y_{2n\mu-\mu-1}, \quad v_n = z_{2n\mu-\mu-1}.$$

Posons ensuite

(19) $$y_r^2 - a z_r^2 = (-1)^{r-1} \omega_r,$$

nous aurons donc ici

(20) $$\omega_{\mu-1} = 2.$$

Soit, au contraire, pour la fraction continue (17),

(21) $$\omega_{\mu-1} > 2,$$

la base a est divisible par ω_{u-1} ou par $\frac{\omega_{u-1}}{2}$, selon que ω_{u-1} est impair ou pair, de sorte que l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^u \omega_{u-1}$$

n'est pas résoluble.

Remarquons, en passant, que les formules (15) ont été étudiées par Paul Tannery [1] qui suppose qu'Archimède les ait appliquées pour calculer les solutions de l'équation

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

à l'aide de celles de l'équation correspondante

$$u^2 - 3v^2 = -2.$$

IV. Des suites coordonnées.

Revenons maintenant à l'équation générale

(1) $$u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta \omega, \quad \omega > 2,$$

puis désignons par

(2) $$\begin{vmatrix} (s_1, t_1), (s_2, t_2), \ldots, (s_n, t_n), \ldots \\ (u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_n, v_n), \ldots \end{vmatrix}$$

deux suites coordonnées, formées des solutions de l'équation (1), nous avons tout d'abord à démontrer la proposition:

I. Les éléments généraux des deux suites coordonnées (2) sont liés par les formules

(3) $$s_n u_p + a t_n v_p = \omega A_{n+p-1}, \quad s_n v_p + t_n u_p = \omega B_{n+p-1}.$$

En effet, appliquons les formules récursives générales

(4) $$u_{n+p} = u_p A_n + a v_p B_n, \quad v_{n+p} = u_p B_n + v_p A_n$$

et les formules analogues contenant les s_n et t_n, les formules (3) sont les conséquences immédiates des formules (9) de l'article II.

[1] Mémoires scientifiques, publiés par J.-L. Heiberg et H.-G. Zeuthen. Voir notamment t. I, pp. 80—105, 238—239, 252—253; t. II, p. 160—161.

Posons maintenant

$$(5)\qquad s_n^2 - a t_n^2 = (-1)^{\vartheta_n}\omega\,,\quad u_p^2 - a v_p^2 = (-1)^{\varepsilon_p}\omega\,,$$

et résolvons par rapport à A_n et B_n les deux équations (4), puis remplaçons n par $n-p$, il résulte

$$(6)\qquad \begin{cases} \omega A_{n-p} = (-1)^{\varepsilon_p}(u_n u_p - a v_n v_p)\,, \\ \omega B_{n-p} = (-1)^{\varepsilon_p}(v_n u_p - v_p u_n)\,, \end{cases}$$

où il faut supposer naturellement $n > p$.

Quant aux applications des deux formules (3) et (6), nous désignons comme multiplication positive l'opération indiquée par l'identité algébrique

$$(7)\qquad (p^2 - aq^2)(\alpha^2 - a\beta^2) = (p\alpha + aq\beta)^2 - a(p\beta + q\alpha)^2,$$

tandis que la multiplication négative se définit par l'identité analogue

$$(8)\qquad (p^2 - aq^2)(\alpha^2 - a\beta^2) = (p\alpha - aq\beta)^2 - a(p\beta - q\alpha)^2.$$

Ces définitions adoptées, il est facile de démontrer la proposition :

II. Les éléments de deux suites coordonnées conduiront, par la multiplication positive, à l'équation de Fermat.

On aura, en effet, en multipliant les deux formules (5), puis appliquant (3),

$$(9)\qquad \left(\frac{s_n u_p + a t_n v_p}{\omega}\right)^2 - a\left(\frac{s_n v_p + t_n u_p}{\omega}\right)^2 = (-1)^{\vartheta_n + \varepsilon_p}.$$

La multiplication négative donnera de même, en vertu de (6),

$$(10)\qquad \left(\frac{u_n u_p - a v_n v_p}{\omega}\right)^2 - a\left(\frac{u_n v_p - u_p v_n}{\omega}\right)^2 = (-1)^{\varepsilon_n + \varepsilon_p},$$

d'où il résulte la proposition analogue à la précédente :

III. Les éléments de la même suite conduiront, par la multiplication négative, à l'équation de Fermat.

Quant aux deux autres équations, analogues à (9) et (10),

$$(11)\quad \begin{cases} (s_n u_p - a t_n v_p)^2 - a (s_n u_p - t_n u_p)^2 = (-1)^{\varepsilon_n+\varepsilon_p}\omega^2 \\ (u_n u_p + a v_n v_p)^2 - a (u_n v_p + v_n u_p) = (-1)^{\varepsilon_n+\varepsilon_p}\omega^2, \end{cases}$$

posons pour abréger

$$\omega_1 = \omega\,, \quad \omega_1 = \frac{\omega}{2}\,,$$

selon que ω est pair ou impair, nous démontrerons, dans l'article VIII, que les équations (11) représentent des solutions de l'équation

$$(12)\qquad u^2 - a v^2 = (-1)^{\varepsilon}\omega_1^2.$$

Cela posé, nous avons à démontrer les théorèmes inverses de II et III, savoir:

IV. Supposons que les deux solutions (s_μ, t_μ) et (u_ν, v_ν) de l'équation (1) conduisent, par la multiplication positive, à l'équation de Fermat, ces deux solutions appartiennent à des suites coordonnées.

Soit

$$(13)\qquad s_\mu u_\nu + a t_\mu v_\nu = \omega A_n\,, \quad s_\mu v_\nu + t_\mu u_\nu = \omega B_n\,,$$

nous ne savons dès à présent rien sur la grandeur relative des trois indices μ, ν, n, mais les formules récursives

$$s_\mu = s_1 A_{\mu-1} + a t_1 B_{\mu-1}\,, \quad t_\mu = s_1 B_{\mu-1} + t_1 A_{\mu-1}$$
$$u_\nu = u_1 A_{\nu-1} + a v_1 B_{\nu-1}\,, \quad v_\nu = u_1 B_{\nu-1} + v_1 A_{\nu-1}$$
$$A_{p+r} = A_p A_r + a B_p B_r\,, \qquad B_{p+r} = A_p B_r + B_p A_r$$

donnent, en vertu de (13),

$$(14)\quad \begin{cases} (s_1 u_1 + a t_1 v_1) A_\sigma + (s_1 v_1 + t_1 u_1) B_\sigma = \omega A_n \\ (s_1 u_1 + a t_1 v_1) A_\sigma + (s_1 v_1 + t_1 u_1) A_\sigma = \omega B_n \end{cases}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\sigma = \mu + \nu - 2.$$

Cela posé, nous aurons évidemment $\sigma > n$, de sorte que

les formules récursives des A_n et des B_n donnent, en vertu de (14),

(15) $\quad s_1 u_1 + a t_1 v_1 = \omega A_{n-\sigma}, \quad s_1 v_1 + t_1 u_1 = \omega B_{n-\sigma}.$

Soit maintenant, dans ces deux formules, $n-\sigma = 1$, les deux solutions (s_1, t_1) et (u_1, v_1) sont réciproques.

Soit, au contraire, $n-\sigma > 1$, et soit (α_p, β_p) l'élément général de la suite coordonnée à celle qui contient la solution (s_μ, t_μ), on aura, en vertu de (3),

$$s_1 \alpha_{n-\sigma} + a t_1 \beta_{n-\sigma} = \omega A_{n-\sigma},$$

$$s_1 \beta_{n-\sigma} + t_1 \alpha_{n-\sigma} = \omega B_{n-\sigma};$$

d'où il résulte, en vertu de (15),

$$u_1 = \alpha_{n-\sigma}, \quad v_1 = \beta_{n-\sigma};$$

ce qui est impossible, parce que (u_1, v_1) est le premier élément de la suite à laquelle cette solution appartient.

V. Supposons que les deux solutions (s_μ, t_μ) et (u_ν, v_ν) de l'équation (1) conduisent, par la multiplication négative, à l'équation de Fermat, ces deux solutions appartiennent à la même suite.

Soient

(16) $\quad s_\mu u_\nu - a t_\mu v_\nu = (-1)^\sigma \omega A_n, \quad s_\mu v_\nu - t_\mu u_\nu = (-1)^\tau \omega B_n,$

nous ne connaissons dès à présent ni la grandeur relative des indices μ, ν, n ni la parité des exposants σ et τ, mais posons pour abréger

$$\sigma + \tau - 1 = \varrho,$$

il résulte, en vertu de (16),

$$B_n(s_\mu u_\nu - a t_\mu v_\nu) + (-1)^\varrho A_n(s_\mu v_\nu - t_\mu u_\nu) = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

(17) $\quad s_\mu(u_\nu B_n + (-1)^\varrho v_\nu A_n) = t_\mu(a v_\nu B_n + (-1)^\varrho u_n A_n).$

Or, s_μ et t_μ étant premiers entre eux, il résulte, en vertu de (17),

$$(18)\quad \begin{cases} a v_\nu B_n + (-1)^\varrho u_\nu A_n = M s_\mu \\ u_\nu B_n + (-1)^\varrho v_\nu A_n = M t_\mu , \end{cases}$$

où M est un nombre entier, positif ou négatif.

Cela posé, appliquons l'équation de Fermat

$$A_n^2 - a B_n^2 = (-1)^{nk},$$

puis cherchons, des équations (18), les valeurs de u_ν et de v_ν, il résulte

$$(19)\quad \begin{cases} u_\nu = (-1)^{nk\ \varrho} (s_\mu A_n - (-1)^\varrho a t_\mu B_n) M \\ v_\nu = (-1)^{nk\ \varrho} (t_\mu A_n - (-1)^\varrho s_\mu B_n) M , \end{cases}$$

ce qui donnera

$$M = \pm 1,$$

car u_ν et v_ν sont premiers entre eux.

Soit maintenant ϱ un nombre pair, il faut, en vertu de (18), supposer $M = 1$, ce qui donnera

$$(20)\qquad s_\mu = u_{\nu+n}, \quad t_\mu = v_{\nu+n}.$$

Soit, au contraire, ϱ un nombre impair, on aura, en vertu de (19),

$$M = (-1)^{nk+1},$$

ce qui donnera

$$(21)\qquad u_\nu = s_{\mu+n}, \quad v_\nu = t_{\mu+n}.$$

V. Des bases de première espèce.

Il est bien intéressant, ce me semble, que la résolubilité simultanée de certaines équations de Lagrange, ayant la même base, donne des éclaircissements essentiels sur la nature de cette base.

A cet effet, nous avons tout d'abord à démontrer le théorème:

I. Supposons résolubles les deux équations de Lagrange

(1) $$u^2-av^2=p^\varrho,\quad u_1^2-av_1^2=-p^\varrho,$$

où p est un nombre premier quelconque, a est toujours une base de première espèce.

Soit p un nombre premier impair, les deux nombres

(2) $$uu_1+avv_1,\quad uu_1-avv_1$$

sont premiers entre eux, et il est évident que ces deux autres nombres

(3) $$uv_1+u_1v,\quad uv_1-u_1v$$

auront la même propriété.

De plus, il résulte, en vertu des équations (1),

(4) $u^2u_1^2\equiv a^2v^2v_1^2 \pmod{p^\varrho}$, $u^2v_1^2\equiv u_1^2v^2 \pmod{p^\varrho}$;

c'est-à-dire qu'il existe un exposant δ, tel que

(5) $$uu_1+(-1)^\delta avv_1=p^\varrho\alpha,\quad uv_1+(-1)^\delta u_1v=p^\varrho\beta,$$

donc on aura, en multipliant les deux équations (1),

(6) $$\alpha^2-a\beta^2=-1.$$

Soit ensuite $p=2$, nous avons à étudier séparément les trois cas suivants :

1° $\varrho=1$; dans ce cas, les équations (1) ne sont jamais simultanément résolubles.

2° $\varrho=2$, $a=8\mu+5$. Remarquons que les nombres u et v, u_1 et v_1 sont tous impairs, il existe un exposant δ, tel que les équations (5) sont valables, donc on aura ici

(7) $$\left(\frac{uu_1+(-1)^\delta avv_1}{4}\right)^2-a\left(\frac{uv_1+(-1)^\delta u_1v}{4}\right)^2=-1,$$

(8) $$\left(\frac{uu_1-(-1)^\delta avv_1}{2}\right)^2-a\left(\frac{uv_1-(-1)^\delta u_1v}{2}\right)^2=-4.$$

3° $\varrho>3$, $a=8\mu+1$. Dans ce cas, il existe un exposant δ, tel que

(9) $$uu_1-(-1)^\delta avv_1=4\mu+2,\quad uv_1-(-1)^\delta u_1v=4\nu+2,$$

(10) $$uu_1+(-1)^\delta avv_1=2^{\varrho-1}k,\quad uv_1+(-1)^\delta u_1v=2^{\varrho-1}l,$$

et je dis que les nombres k et l, ainsi définis, sont tous deux pairs. En effet, on aura, en multipliant les deux équations (1),

$$k^2 - al^2 = -4,$$

ce qui est impossible pour des valeurs impaires de k et l, parce que a est un nombre de la forme $8\mu+1$.

Le paramètre 4 joue un rôle très singulier dans la théorie des équations de Lagrange, ce qui est mis en pleine lumière par la proposition curieuse:

II. Supposons résoluble l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = -4, \tag{11}$$

la base a est nécessairement de première espèce.

En effet, il résulte, en vertu de (11),

$$\left(\frac{u^2+av^2}{2}\right)^2 - a(uv)^2 = 4, \tag{12}$$

et la proposition II est une conséquence immédiate de I.

Enfin nous avons à démontrer une troisième proposition de ce genre, savoir:

III. Supposons résolubles les deux équations de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta 4p^\varrho, \quad u_1^2 - av_1^2 = (-1)^{\vartheta+1}p^\varrho \tag{13}$$

où p est un nombre premier impair, a est toujour une base de première espèce.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la précédente, parce que les congruences (5) conduiront à l'équation (11).

CHAPITRE II

Genre d'une équation de Lagrange.

VI. Des multiplications positives et négatives.

Dans la théorie des équations de Lagrange, les multiplications positives et négatives jouent un rôle fondamental; c'est pourquoi nous introduisons pour abréger les deux symboles

(1) $$(+)\ (u, v)\,(\alpha, \beta) = (U, V)$$

(2) $$(-)\ (u, v)\,(\alpha, \beta) = (U', V')$$

au lieu des équations

(1 bis) $$U = u\alpha + av\beta, \quad V = u\beta + v\alpha$$

respectivement

(2 bis) $$U' = u\alpha - av\beta, \quad V' = u\beta - v\alpha,$$

de sorte que, dans la multiplication négative, les facteurs symboliques (u, v) et (α, β) ne sont pas permutables, parce que l'on aura, dans le produit $(-)\ (\alpha, \beta)\ (u, v)$,

$$V' = v\alpha - u\beta.$$

Or, dans nos recherches suivantes, cette propriété singulière de la multiplication négative ne joue aucun rôle pour les applications, parce qu'il s'agit toujours du carré de V'. Quant aux deux formules symboliques (1) et (2), nous avons tout d'abord à développer une suite d'identités générales, valables quelles que soient les valeurs des nombres qui y figurent.

Soit, en premier lieu,

(3) $$(u_1, v_1),\ (u_2, v_2),\ \ldots,\ (u_n, v_n),\ \ldots$$

une suite infinie, dont les éléments se forment, à l'aide du premier, par les formules récursives

(4) $$u_n = u_1 A_{n-1} + a v_1 B_{n-1}, \quad v_n = u_1 B_{n-1} + v_1 A_{n-1},$$

ou A_μ et B_μ désignent comme ordinairement les solutions générales de l'équation de Fermat ayant la base a, savoir

(5) $$A_\mu^2 - a B_\mu^2 = (-1)^{k\mu},$$

et soit

(6) $$(\pm)\ (u_n, v_n)\ (\alpha, \beta) = (U_n, V_n),$$

je dis que nous aurons, quelle que soit la nature de la multiplication en question,

(7) $$U_n = A_{n-1} U_1 \pm a B_{n-1} V_1, \quad V_n = A_{n-1} V_1 \pm B_{n-1} U_1.$$

En effet, posons

$$U_n = u_n \alpha + (-1)^\vartheta a v_n \beta, \quad V_n = u_n \beta + (-1)^\vartheta v_n \alpha,$$

les formules récursives (4) donnent

(8) $$U_n = A_{n-1}(u_1\alpha + (-1)^\vartheta a v_1 \beta) + (-1)^\vartheta a B_{n-1}(u_1\beta + (-1)^\vartheta a v_1 \alpha)$$

(9) $$V_n = A_{n-1}(u_1\beta + (-1)^\vartheta v_1 \alpha) + (-1)^\vartheta B_{n-1}(u_1\alpha + (-1)^\vartheta v_1 \beta),$$

ce qui est précisément la formule symbolique (6).

Cela posé, désignons par S la suite (3), par T la suite nouvelle

(10) $$(\alpha_1, \beta_1),\ (\alpha_2, \beta_2),\ \ldots,\ (\alpha_n, \beta_n),\ \ldots$$

dont les éléments sont à former, à l'aide du premier, par les formules récursives, analogues à (4),

(11) $$\alpha_n = A_{n-1}\alpha_1 + a B_{n-1}\beta_1, \quad \beta_n = A_{n-1}\beta_1 + B_{n-1}\alpha_1,$$

il résulte, en vertu des formules (8) et (9), que les produits symboliques

(12) $$(+)\ (u_n, v_n)\ (\alpha_p, \beta_p), \quad (-)\ (u_n, v_n)\ (\alpha_p, \beta_p)$$

sont des éléments de deux suites nouvelles M et N, ce que nous exprimons par les équations symboliques

(13) $$(+)\,ST = M, \quad (-)\,ST = N.$$

Soient ensuite (u'_n, v'_n) et (α'_n, β'_n) les éléments généraux des deux suites S' et T' coordonnées respectivement à S et à T, ce que nous exprimons par les symboles

(14) $$S' \infty S, \quad T' \infty T,$$

nous aurons, en vertu de la formule (9) de l'article II,

$$u' = (-1)^{\vartheta}(uA_1 - av B_1), \quad v' = (-1)^{\vartheta}(uB_1 - vA_1)$$

$$\alpha' = (-1)^{\varepsilon}(\alpha A_1 - a\beta B_1), \quad \beta' = (-1)^{\varepsilon}(\alpha B_1 - \beta A_1),$$

où (u', v') et (u, v), (α', β') et (α, β) sont les premiers éléments des suites S' et S, T' et T, et où nous avons posé

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\vartheta}\omega, \quad \alpha^2 - a\beta^2 = (-1)^{\varepsilon}\omega_1.$$

Cela posé, un élément (U, V) de la suite $(+)\,S'\,T$ se présente sous la forme

$$U = \alpha u' + a\beta v', \quad V = \alpha v' + \beta u',$$

ce qui donnera

(15) $$(-1)^{\vartheta}U = A_1(\alpha u - a\beta v) + aB_1(u\beta - v\alpha)$$

(16) $$(-1)^{\vartheta}V = A_1(u\beta - v\alpha) + B_1(u\alpha - av\beta).$$

On aura de même, pour l'élément correspondant (U', V') de la suite $(+)\,S\,T'$,

$$U' = u\alpha' + av\beta', \quad V' = u\beta' + v\alpha',$$

ou, ce qui est la même chose,

(17) $$(-1)^{\varepsilon}U' = A_1(u\alpha - av\beta) - aB_1(u\beta - v\alpha)$$

(18) $$(-1)^{\varepsilon}V' = B_1(u\alpha - av\beta) - A_1(u\beta - v\alpha).$$

Ces résultats obtenus, il est facile de démontrer l'identité symbolique

(19) $$(-)\,S\,T' = (-)\,S'\,T.$$

En effet, posons pour abréger

$$M = u\alpha' - av\beta', \quad N = u\beta' - v\alpha'$$
$$M' = u'\alpha - av'\beta, \quad N' = u'\beta - v'\alpha,$$

il résulte, en vertu des formules fondamentales concernant les suites coordonnées S et S', T et T',

$$(-1)^{\vartheta}M = (-1)^{\varepsilon}M' = A_1(u\alpha + av\beta) - aB_1(u\beta + v\alpha)$$

$$(-1)^{\vartheta}N = (-1)^{\varepsilon}N' = B_1(u\alpha + av\beta) - A_1(u\beta + v\alpha),$$

ce qui n'est autre chose que l'identité (19).

Quant aux multiplications positives et négatives, nous avons encore à démontrer une proposition essentielle concernant les produits symboliques

$$(\pm)\,(u, v)\,(\alpha, \beta),$$

où (u, β) et (α, β) sont des solutions quelconques des équations de LAGRANGE

$$(20) \qquad u^2 - av^2 = (-1)^{\vartheta}\omega, \quad \alpha^2 - a\beta^2 = (-1)^{\varepsilon}\omega_1,$$

où les paramètres ω et ω_1 sont des positifs entiers quelconques, savoir:

I. Un facteur commun des deux nombres

$$(21) \qquad u\alpha + (-1)^{\vartheta}av\beta = K, \quad u\beta + (-1)^{\vartheta}v\alpha = L$$

est aussi diviseur commun des deux paramètres ω et ω_1.

En effet, cherchons, des équations (21), les valeurs de α et β, nous aurons, en vertu de (20),

$$(-1)^{\vartheta}\omega\alpha = uK - (-1)^{\vartheta}av L, \quad (-1)^{\vartheta}\omega\beta = uL - (-1)^{\vartheta}vK.$$

Soit maintenant f un diviseur commun de K et L, f est aussi diviseur commun de $\omega\alpha$ et de $\omega\beta$. Désignons ensuite par f_1 le plus grand commun diviseur de f et de ω, puis posons

$$f = f_1 f_2,$$

f_2 est premier avec ω, donc f_2 est diviseur commun de α et de β, ce qui est impossible, à moins que $f_2 = 1$, d'où on aura $f_1 = f$. Et l'on démontrera, par le même procédé, que f est aussi diviseur de ω_1.

VII. Des paramètres premiers entre eux.

Comme première application des identités générales que nous venons de développer, dans l'article précédent, nous avons à étudier la multiplication des deux équations de Lagrange

$$(1) \qquad u^2 - av^2 = (-1)^{\vartheta}\omega\,, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\varepsilon}\omega_1\,,$$

dont les paramètres ω et ω_1 sont premiers entre eux.

A cet effet, remarquons tout d'abord que la proposition I de l'article précédent donnera immédiatement le théorème fondamental:

I. Une multiplication quelconque des deux équations (1) donnera toujours une solution de cette autre équation

$$(2) \qquad u^2 - uv^2 = (-1)^{\vartheta+\varepsilon}\,\omega\,\omega_1.$$

Supposons maintenant à la fois

$$(3) \qquad \omega > 2\,, \quad \omega_1 > 2\,,$$

puis désignons par (u_n, v_n) et (u_n', v_n') des éléments quelconques de deux suites coordonnées S et S' de la première des équations (1), par (α_n, β_n) et (α_n', β_n') des éléments quelconques de deux suites coordonées T et T' de la seconde des équations susdites, les développements de l'article précédent donnent immédiatement les deux théorèmes généraux:

II. La multiplication des deux équations (1) donnera, quelles que soient les suites coordonnées S et S', T et T':

$$(4) \qquad (+)\,ST' \backsim (+)\,S'T$$

$$(5) \qquad (-)\,ST' = (-)\,S'T \backsim (+)\,ST.$$

Ces résultats obtenus, il est possible de discuter complètement la multiplication des suites S et S' par les suites T et T', savoir les huit suites

$$(+)\,ST,\ (+)\,ST',\ (+)\,S'T,\ (+)\,S'T'$$
$$(-)\,ST,\ (-)\,ST',\ (-)\,S'T,\ (-)\,S'T'.$$

A cet effet, remarquons tout d'abord que la proposition II donnera immédiatement

$$(6)\qquad (-)\,ST' = (-)\,S'T,\quad (-)\,S'T' = (-)\,ST$$

$$(7)\qquad (+)\,ST \sim (+)\,S'T',\quad (+)\,ST' \sim (+)\,S'T,$$

nous avons à étudier séparément les deux hypothèses suivantes:

1° Les deux nombres

$$(8)\qquad u\alpha - av\beta.\quad u\beta - v\alpha$$

ont le même signe.

Dans ce cas nous aurons

$$(+)\,ST' = (-)\,ST = (-)\,S'T' \sim (+)\,ST$$
$$(-)\,ST' = (-)\,S'T = (+)\,S'T' \sim (+)\,ST'.$$

Posons donc

$$(9)\qquad \sigma = (+)\,ST,\quad \tau = (+)\,ST',$$

il résulte, pour les suites coordonnées, les trois expressions

$$(10)\qquad \sigma' = (+)\,ST' = (-)\,ST = (-)\,S'T'$$

$$(11)\qquad \tau' = (+)\,S'T' = (-)\,ST' = (-)\,S'T.$$

2° Les deux nombres (8) ont des signes différents.

Dans ce cas, nous aurons

$$(12)\qquad (+)\,S'T = (-)\,ST = (-)\,S'T',$$

et ces trois suites identiques sont coordonnées ou à $(+)\,S'T'$ ou à $(+)\,ST$.

Supposons tout d'abord

$$(+)\,S'T \sim (+)\,S'T',$$

nous aurons

$$(-)\,ST' = (-)\,S'T = (+)\,ST \sim (+)\,S'T',$$

de sorte qu'il résulte, pour les suites coordonnées de l'équation (2),

(13) $$\sigma = (+)\,S'T', \quad \tau = (+)\,S'T$$

(14) $$\sigma' = (+)\,ST = (-)\,ST' = (-)\,S'T$$

(15) $$\tau' = (+)\,S'T = (-)\,ST = (-)\,S'T'.$$

Soit, au contraire, les trois suites (12) coordonnées à $(+)\,ST$, on aura

$$(+)\,S'T' - (-)\,S'T = (-)\,ST' \sim (+)\,ST,$$

ce qui donnera, pour les suites coordonnées de l'équation (2),

(16) $$\sigma = (+)\,ST, \quad \tau = (+)\,S'T$$

(17) $$\sigma' = (+)\,S'T' = (-)\,S'T = (-)\,ST'$$

(18) $$\tau' = (+)\,S'T = (-)\,ST = (-)\,S'T'.$$

Cela posé, nous avons démontré le second des théorèmes généraux susdits :

III. La multiplication de deux couples de suites coordonnées S et S', T et T' de chacune des équations (1) conduira toujours à deux couples de suites coordonnées σ et σ', τ et τ' de l'équation (2).

On voit que la multiplication que nous venons d'étudier a la propriété curieuse que deux des suites ainsi obtenues ne se présentent qu'une seule fois, tandis que les deux suites coordonnées se présentent trois fois. Or, on voit que les quatre multiplications positives donnent précisément les deux couples de suites coordonnées de l'equation (2).

Quant à la multiplication des deux équations (1), nous avons encore à démontrer la proposition :

IV. Aucune des quatre égalités

(19) $$(\pm)\,ST = (\pm)\,SU$$

n'est possible, à moins que les deux suites T et U ne soient ou identiques ou coordonnées.

On peut, en vertu de l'égalité (5)

$$(-)\,ST = (+)\,ST',$$

se borner à étudier une seule des quatre équations (19), par exemple

$$(+)\,ST = (+)\,SU. \tag{20}$$

Soient maintenant (α, β) un élément quelconque de S, (u, v) et (u_1, v_1) des éléments quelconques de T et U, on aura, en vertu de (20),

$$\begin{aligned}(u-u_1)\,\alpha + a\,(v-v_1)\,\beta &= 0\\ (u-u_1)\,\beta + (v-v_1)\,\alpha &= 0\,,\end{aligned}$$

ce qui donnera nécessairement $u = u_1$, $v = v_1$, parce que les hypothèses $\alpha = \beta = 0$ sont inadmissibles.

Pour mettre en pleine lumière le caractère singulier de la multiplication de deux équations de Lagrange, il nous semble utile de considérer des exemples convenables.

Exemple I. $a = 7$, $\omega = 3$, $\omega_1 = 19$.

Les premiers éléments des deux suites coordonnées S et S' de l'équation

$$u^2 - 7v^2 = -3$$

sont (2, 1) et (5, 2), savoir

$$2^2 - 7\cdot 1^2 = -3\,,\quad 5^2 - 7\cdot 2^2 = -3\,,$$

tandis que les premiers éléments des suites coordonnées T et T' de l'équation

$$u^2 - 7v^2 = -19$$

sont (3, 2) et (18, 7), savoir

$$3^2 - 7\cdot 2^2 = -19\,,\quad 18^2 - 7\cdot 7^2 = -19.$$

Les deux couples de suites coordonnées σ et σ', τ et τ' de l'équation

$$u^2 - 7v^2 = 57$$

sont (20, 7) et (13, 4) respectivement (43, 16) et (8, 1), savoir, pour σ et σ',

$$20^2 - 7\cdot 7^2 = 57\,,\quad 13^2 - 7\cdot 4^2 = 57$$

et pour τ et τ'

$$43^2 - 7\cdot 16^2 = 57\,, \quad 8^2 - 7\cdot 1^2 = 57.$$

Dans ce cas, nous aurons

$$\sigma = (+)\,ST\,, \quad \tau = (+)\,S'T$$
$$\sigma' = (+)\,S'T' = (-)\,S'T = (-)\,ST'$$
$$\tau' = (+)\,ST' = (-)\,ST = (-)\,S'T'.$$

Exemple II. $a = 5\,, \quad \omega = 4\,, \quad \omega_1 = 11.$

On aura ici, pour S et S', les premiers éléments (1, 1) et (3, 1), savoir

$$1^2 - 5\cdot 1^2 = -4\,, \quad 3^2 - 5\cdot 1^2 = 4\,,$$

tandis que les suites T et T' ont les premiers éléments (3, 2) et (4, 1), savoir

$$3^2 - 5\cdot 2^2 = -11\,, \quad 4^2 - 5\cdot 1^2 = 11.$$

Quant aux deux couples de suites coordonnées σ et σ', τ et τ' de l'équation indéterminée

$$u^2 - 5v^2 = \pm 44\,,$$

on aura, pour les premiers éléments de σ et σ', (13, 5) et (1, 3), savoir

$$13^2 - 5\cdot 5^2 = 44\,, \quad 1^2 - 5\cdot 3^2 = -44\,,$$

tandis que les suites τ et τ' ont les premiers éléments (9, 5) et (7, 1), savoir

$$9^2 - 5\cdot 5^2 = -44\,, \quad 7^2 - 5\cdot 1^2 = 44.$$

Dans ce cas, on aura

$$\sigma = (+)\,ST\,, \quad \tau = (+)\,ST'$$
$$\sigma' = (+)\,S'T' = (-)\,S'T = (-)\,ST'$$
$$\tau' = (+)\,S'T = (-)\,ST = (-)\,S'T'.$$

Quant au cas particulier $\omega = 2$, posons par exemple

$$S' = S\,,$$

les formules (4) et (5) donnent les résultats

$$(+)\,ST' \sim (+)\,ST$$
$$(-)\,ST' \sim (+)\,ST\,,$$

de sorte que nous aurons

$$\sigma = (+)\,ST, \quad \sigma' = (-)\,ST = (-)\,ST' = (+)\,ST'.$$

Multiplions par exemple les deux équations

$$u^2 - 7v^2 = 2\,, \quad u^2 - 7v^2 = -3\,,$$

la suite S a le premier élément (3, 1), savoir

$$3^2 - 7 \cdot 1^2 = 2\,,$$

tandis que les suites coordonnées T et T' ont les premiers éléments (2, 1) et (5, 2). Quant à l'équation

$$u^2 - 7v^2 = -6\,,$$

les premiers éléments de ses deux suites coordonnées σ et σ' sont (13, 5) et (1, 1), savoir

$$13^2 - 7 \cdot 5^2 = -6\,, \quad 1^2 - 7 \cdot 1^2 = -6.$$

Et nous aurons ici

$$\sigma = (+)\,ST, \quad \sigma' = (-)\,ST = (-)\,ST' = (+)\,ST'.$$

VIII. Du genre d'une équation de Lagrange.

Les résultats, obtenus dans l'article précédent, permettent de démontrer quelques théorèmes fondamentaux concernant le genre d'une équation de Lagrange, savoir le nombre total de suites formées de ses solutions.

Cette définition du genre adoptée, les résultats obtenus dans l'article III donnent immédiatement la proposition:

I. Les équations au paramètre 2 sont du genre 1, et inversement.

Soit ensuite $\omega > 2$ la puissance d'un nombre premier ou le double d'une telle puissance, il existe, en vertu des développements de l'article V, un exposant σ, tel que

$$\left(\frac{uu_1 + (-1)^{\sigma} uvv_1}{\omega}\right)^2 - a\left(\frac{uv_1 + (-1)^{\sigma} u_1 v}{\omega}\right)^2 = (-1)^{\vartheta - \varepsilon},$$

où (u, v) et (u_1, v_1) appartiennent à chacune des deux suites

coordonnées appartenant à l'équation de LAGRANGE en question.

Appliquons ensuite les propositions IV et V de l'article IV, nous aurons cette autre proposition :

II. Une équation de LAGRANGE, dont le paramètre $\omega > 2$ est la puissance d'un nombre premier ou le double d'une telle puissance, est toujours du genre 2.

Quant à ce dernier théorème, remarquons expressément que le théorème inverse n'est pas vrai, car l'équation

$$u^2 - 37v^2 = \pm 12$$

est du genre 2.

Posons maintenant

$$\omega = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}, \tag{1}$$

où $p_1, p_2, \dots, p_r$ sont des nombres premiers inégaux, puis supposons résolubles les r équations

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\delta_s} p_s^{\alpha_s}, \quad s = 1, 2, 3, \dots, r, \tag{A_r}$$

nous disons que l'équation de LAGRANGE

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\delta} \omega, \quad \delta = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_r \tag{2}$$

est parfaitement décomposable. Et, cette définition adoptée, il est facile de démontrer la proposition :

III. Le genre d'une équation parfaitement décomposable, dont le paramètre contient r facteurs premiers, est au moins égal à 2^{r-1} ou à 2^r, selon que ω est de la forme $4k+2$ ou non.

En effet, supposons tout d'abord que ω ne soit pas de la forme $4k+2$, puis multiplions les deux équations (A_1) et (A_2), nous aurons une équation dont le genre est au moins égal à 4, et ainsi de suite.

Soit maintenant

$$\omega = 4k+2 = 2\omega_1,$$

l'équation de Lagrange au paramètre ω_1 est au moins du genre 2^{r-1}, donc l'équation proposée aura la même propriété.

Démontrons maintenant la proposition inverse de la précédente, savoir:

IV. Le genre d'une équation de Lagrange, dont le paramètre ω contient r facteurs premiers, est au plus égal à 2^{r-1} respectivement à 2^r, selon que ω est de la forme $4k+2$ ou non.

En effet, désignons par (s, t) et (u, v) deux solutions quelconques de l'équation en question, savoir

$$s^2 - at^2 = (-1)^\vartheta \omega, \quad u^2 - av^2 = (-1)^\varepsilon \omega, \tag{3}$$

nous aurons, en éliminant a,

$$(sv + tu)(sv - tu) \equiv 0 \pmod{\omega}, \tag{4}$$

et il est facile de démontrer que le nombre 2 est le seul facteur commun des deux nombres

$$M = sv + tu, \quad N = sv - tu \tag{5}$$

qui divise aussi ω.

En premier lieu, il est évident qu'un facteur commun de M et N est aussi facteur commun des deux nombres

$$M + N = 2sv, \quad M - N = 2tu;$$

de plus, ω est premier avec chacun des nombres s, t, u, v.

Soit ensuite ω un nombre impair, il existe donc une décomposition de la forme

$$\omega = \omega_1 \omega_2, \tag{6}$$

où ω_1 et ω_2 sont premiers entre eux, de sorte que

$$sv + tu \equiv 0 \pmod{\omega_1}, \quad sv - tu \equiv 0 \pmod{\omega_2}, \tag{7}$$

et la décomposition (6) admet précisément

$$\binom{r}{0} + \binom{r}{1} + \ldots + \binom{r}{s} + \ldots + \binom{r}{r} = 2^r$$

solutions différentes.

Combinons maintenant la solution fixe (s, t) avec toutes les solutions possibles de l'équation de LAGRANGE en question, il est évident que le nombre total de ces solutions ne peut jamais dépasser 2^r.

Soit, au contraire, ω un nombre pair, nous posons

$$\omega = 2\omega_1\omega_2, \tag{8}$$

où ω_1 et ω_2 sont premiers entre eux, et il est évident que le nombre total des décompositions (7) est 2^{r-1} respectivement 2^r, selon que ω est de la forme $4k+2$ ou non.

Cette démonstration de la proposition IV est due à M. G. RASCH.

Or, les propositions III et IV étant établies, nous aurons immédiatement cette autre:

V. Le genre d'une équation parfaitement décomposable, dont le paramètre ω contient r facteurs premiers, est precisément égal à 2^{r-1} ou à 2^r, selon que ω est de la forme $4k+2$ ou non.

La détermination exacte du genre d'une équation quelconque est évidemment un problème très difficile, c'est pourquoi nous nous bornerons ici aux résultats généraux que nous venons d'établir.

IX. Des paramètres avec facteurs communs.

Considérons maintenant les deux équations de LAGRANGE

$$u^2 - av^2 = (-1)^\sigma\omega, \quad u_1^2 - av_1^2 = (-1)^\sigma\omega_1, \tag{1}$$

dont les paramètres ω et ω_1, ne sont pas premiers entre eux.

Soit δ un exposant quelconque, il existe, en vertu du théorème I de l'article VI, un nombre f, diviseur commun de ω et de ω_1, tel que l'équation

$$\left(\frac{uu_1 + (-1)^\delta a v v_1}{f}\right)^2 - a\left(\frac{uv_1 + (-1)^\delta u_1 v}{f}\right)^2 = \frac{(-1)^{\sigma+\sigma}\omega\omega_1}{f^2} \tag{2}$$

est résoluble.

Or, le problème général concernant la multiplication des deux équations (1) me semble assez compliqué, et je n'ai pas réussi à obtenir des résultats d'une portée plus étendue. C'est pourquoi nous nous bornerons à étudier ici le cas spécial $\omega = \omega_1$, de sorte qu'il s'agit d'une seule équation de Lagrange.

A cet effet, supposons que l'équation en question

$$u^2 - av^2 = (-1)^\varrho \omega \tag{3}$$

soit au moins du rang 4, puis désignons par (u, v) et (u_1, v_1) deux solutions de cette équation qui n'appartiennent ni à la même suite ni à deux suites coordonnées, il résulte, en vertu de (3) et de l'équation correspondante

$$u_1^2 - av_1^2 = (-1)^\sigma \omega, \tag{4}$$

les deux congruences

$$\left\{\begin{array}{l} (uu_1)^2 - (avv_1)^2 \equiv 0 \pmod{\omega} \\ (uv_1)^2 - (u_1 v)^2 \equiv 0 \pmod{\omega}, \end{array}\right. \tag{5}$$

ce qui nous conduira à étudier séparément les cas suivants:

1° Soit ω un nombre impair, il est possible de décomposer ω en deux facteurs ω_1 et ω_2, premiers entre eux, savoir

$$\omega = \omega_1 \omega_2, \tag{6}$$

de sorte que nous aurons, en vertu de (5),

$$\begin{aligned} uu_1 + avv_1 &\equiv 0 \pmod{\omega_1} \\ uu_1 - avv_1 &\equiv 0 \pmod{\omega_2}, \end{aligned}$$

ce qui donnera, en vertu des congruences (5),

$$\begin{aligned} uv_1 + u_1 v &\equiv 0 \pmod{\omega_1} \\ uv_1 - u_1 v &\equiv 0 \pmod{\omega_2}, \end{aligned}$$

donc nous aurons les deux équations résolubles

$$\left(\frac{uu_1 + avv_1}{\omega_1}\right)^2 - a\left(\frac{uv_1 + u_1 v}{\omega_1}\right)^2 = (-1)^{\varrho+\sigma}\omega_2^2 \tag{7}$$

$$\left(\frac{uu_1 - avv_1}{\omega_2}\right)^2 - a\left(\frac{uv_1 - u_1 v}{\omega_2}\right)^2 = (-1)^{\varrho+\sigma}\omega_1^2, \tag{8}$$

et il est évident que ni ω_1 ni ω_2 ne peut être égal à l'unité parce que les deux solutions (u, v) et (u_1, v_1) n'appartiennent pas au même couple de suites coordonnées.

2° Supposons $\omega = 4k+2$, nous aurons, au lieu de (6),

$$\omega = 2\omega_1\omega_2, \tag{9}$$

où ω_1 et ω_2 sont des nombres impairs, premiers entre eux, ce qui donnera

$$uu_1 + avv_1 \equiv 0 \pmod{2\omega_1}$$
$$uu_1 - avv_1 \equiv 0 \pmod{2\omega_2},$$

donc nous aurons, comme dans le cas précédent, les deux équations résolubles

$$\left(\frac{uu_1 + avv_1}{2\omega_1}\right)^2 - a\left(\frac{uv_1 + u_1v}{2\omega_1}\right)^2 = (-1)^{\varrho+\sigma}\omega_2^2 \tag{10}$$

$$\left(\frac{uu_1 - avv_1}{2\omega_2}\right)^2 - a\left(\frac{uv_1 - u_1v}{2\omega_2}\right)^2 = (-1)^{\varrho+\sigma}\omega_1^2. \tag{11}$$

3° Soit $\omega = 8k+4$, on aura, au lieu de (6),

$$\omega = 4\omega_1\omega_2, \tag{12}$$

où ω_1 et ω_2 sont toujours impairs et premiers entre eux, de sorte qu'il existe un exposant ε, tel que

$$uu_1 + (-1)^\varepsilon avv_1 \equiv 0 \pmod{4\omega_1}$$
$$uu_1 - (-1)^\varepsilon avv_1 \equiv 0 \pmod{2\omega_2},$$

car la différence, ou la somme, des premiers membres de ces deux congruences sont des nombres de la forme $4k+2$.

Cela posé, nous aurons, dans ce cas, les deux équations résolubles

$$\left(\frac{uu_1 + (-1)^\varepsilon avv_1}{4\omega_1}\right)^2 - a\left(\frac{uv_1 + (-1)^\varepsilon u_1v}{4\omega_1}\right)^2 = (-1)^{\varrho+\sigma}\omega_2^2 \tag{13}$$

$$\left(\frac{uu_1 - (-1)^\varepsilon avv_1}{2\omega_2}\right)^2 - a\left(\frac{uv_1 - (-1)^\varepsilon u_1v}{2\omega_2}\right)^2 = (-1)^{\varrho+\sigma}\omega_1^2. \tag{14}$$

4° Soit a multiple de 8, on aura, au lieu de (6),

$$\omega = 2^n\omega_1\omega_2, \quad n \geq 3, \tag{15}$$

où ω_1 et ω_2 sont impairs et premiers entre eux, et les congruences (5) donnent ici, comme dans le cas précédent,

$$uu_1 + (-1)^{\varepsilon} avv_1 \equiv 0 \pmod{2\omega_1}$$
$$uu_1 - (-1)^{\varepsilon} avv_1 \equiv 0 \pmod{2^{n-1}\omega_2},$$

de sorte qu'il résulte finalement les deux équations résolubles

$$(16)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{uu_1 + (-1)^{\varepsilon} avv_1}{2\omega_1}\right)^2 - a\left(\dfrac{uv_1 + (-1)^{\varepsilon} u_1 v}{2\omega_1}\right)^2 = \\ \qquad = (-1)^{\varrho+\sigma} 2^{2n-2} \omega_2^2 \end{array} \right.$$

$$(17)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{uu_1 - (-1)^{\varepsilon} avv_1}{2^{n-1}\omega_2}\right)^2 - a\left(\dfrac{uv_1 - (-1)^{\varepsilon} u_1 v}{2^{n-1}\omega_2}\right)^2 = \\ \qquad = (-1)^{\varrho+\sigma} \omega_1^2 . \end{array} \right.$$

Du reste, les multiplications que nous venons d'étudier ici possèdent les mêmes propriétés curieuses que celles établies dans l'article VII, où les paramètres sont premiers entre eux, nous le verrons dans l'article qui suit.

X. Des équations du genre 4.

Soient p et q deux nombres premiers inégaux, et soient les exposants ϱ et σ choisis tels que le produit $p^{\varrho} q^{\sigma}$ n'est pas de la forme $4k+2$, les résultats généraux, obtenus dans l'article VIII, donnent immédiatement la proposition:

I. Supposons décomposable l'équation de LAGRANGE

$$(1)\qquad u^2 - av^2 = (-1)^m p^{\varrho} q^{\sigma},$$

cette équation est précisément du rang 4.

Or, cette condition suffisante n'est pas nécessaire, pour que l'équation (1) soit du genre 4. Quant à la démonstration de ce postulat, nous avons tout d'abord à démontrer cette autre proposition:

II. Supposons que l'équation (1) soit du genre 4, ces deux autres équations

(2) $\qquad u^2 - av^2 = (-1)^{\lambda} p^{2\varrho}, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\mu} q^{2\sigma}$

sont aussi résolubles, pourvu que les nombres premiers p et q soient tous deux impairs.

En effet, désignons par (s, t) et (u, v) deux solutions de l'équation (1) qui n'appartiennent pas au même couple de suites coordonnées, nous savons, conformément aux résultats obtenus dans l'article IV, que la multiplication des deux équations

$$s^2 - at^2 = (-1)^{\alpha} p^{\varrho} q^{\sigma}, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\beta} p^{\varrho} q^{\sigma}$$

ne conduira jamais à l'équation de Fermat.

Cela posé, il existe, en vertu du théorème I de l'article IV, un éxposant δ, tel que

$$su + (-1)^{\delta} atv \equiv 0 \pmod{p^{\varrho}}$$

$$su - (-1)^{\delta} atv \equiv 0 \pmod{q^{\sigma}},$$

ce qui conduira immédiatement au but.

Quant à l'inversion de la proposition II, nous préférons de démontrer le théorème plus général:

III. Supposons résolubles les deux équations de Lagrange

(3) $\qquad u^2 - av^2 = (-1)^{\lambda} p^{2\varrho} \omega, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\mu} p^{\varrho} \omega,$

où $\omega > 2$ et où p est un nombre premier impair qui ne divise pas ω, la dernière de ces équations est au moins du rang 4.

En effet, désignons par (s, t) et (s_1, t_1) deux solutions appartenant à des suites coordonnées de la seconde des équations (3), par (u, v) et (u_1, v_1) des solutions appartenant aux deux suites coordonnées de la première des équations susdites, il existe un exposant δ, tel que

$$|su+(-1)^{\delta}atv| = p^{\varrho}k\,, \qquad |sv+(-1)^{\delta}tu| = p^{\varrho}l$$
$$|su_1-(-1)^{\delta}atv_1| = p^{\varrho}k_1\,, \quad |sv_1-(-1)^{\delta}tu_1| = p^{\varrho}l_1\,,$$

et il s'agit donc de démontrer que les solutions (k, l) et (k_1, l_1) de la dernière des équations (3) n'appartiennent pas au même couple de suites coordonnées que (s, t).

Or, remarquons que la solution (s_1, t_1) donnera des formules analogues aux précédentes, nous pouvons nous borner à l'étude des nombres provenus des multiplications positives.

Supposons donc, en premier lieu, que la solution (α, β), définie par les formules,

$$(4) \qquad su+atv = p^{\varrho}\alpha\,, \quad sv+tu = p^{\varrho}\beta$$

appartienne à la même suite que (s, t), il est possible de choisir la solution (u, v), telle que

$$su+atv = p^{\varrho}(sA_{\gamma}+atB_{\gamma})$$
$$sv+tu = p^{\varrho}(sB_{\gamma}+tA_{\gamma})$$

où γ est un indice quelconque, et ces deux équations, homogènes en s et t, ne sont pas possibles, à moins que leur déterminant ne disparisse, ce qui donnera

$$(u-p^{\varrho}A_{\gamma})^2 = a(v-p^{\varrho}B_{\gamma})^2\,,$$

équation qui est impossible, parce que la base a n'est pas un carré exact, et les deux équations simultanées

$$u = p^{\varrho}A_{\gamma}\,, \quad v = p^{\varrho}B_{\gamma}$$

sont exclues.

En second lieu, supposons que la solution (α, β) définie par les formules (4), appartienne à la suite coordonnée à celle qui contient (s, t), il résulte des expressions de la forme

$$su+atv = p^{\varrho}s_1\,, \quad tu+sv = p^{\varrho}t_1\,,$$

ce qui donnera

$$(5)\quad \begin{cases} u(s^2+at^2)+av(2st) = p^{2\varrho}A_\gamma \\ v(s^2+at^2)+u(2st) = p^{2\varrho}B_\gamma , \end{cases}$$

où γ est un indice convenablement choisi.

Or, les deux nombres

$$(6)\qquad U = s^2+at^2 , \quad V = 2st$$

satisfont à l'équation résoluble

$$(7)\qquad U^2 - aV^2 = p^{2\varrho}\omega^2 ,$$

et il résulte, en vertu des équations (5),

$$(-1)^\alpha U = \omega(uA_\gamma - avB_\gamma)$$
$$(-1)^\alpha V = \omega(uB_\gamma - vA_\gamma) ,$$

ce qui est impossible, parce que U et V sont tous deux premiers avec ω.

Cela posé, il est évident que l'inversion de la proposition II se présente sous la forme:

IV. Supposons résoluble l'équation (1), les équations (2) sont en même temps résolubles ou non, et, en cas de résolubilité, l'équation (1) est du genre 4.

Les équations non décomposables du genre 4 et de la forme (1) sont très nombreuses, et leur multiplication présente les mêmes propriétés curieuses que les équations générales étudiées dans l'article VII, nous le verrons dans les exemples suivants.

Exemple I. $\qquad a = 34 , \quad \omega = 15.$

L'équation non décomposable

$$u^2 - 34v^2 = (-1)^\delta 15$$

est du rang 4, en admettant deux couples de suites coordonnées s et s', déterminées par les solutions

$$(8)\qquad 7^2 - 34\cdot 1^2 = 41^2 - 34\cdot 7^2 = 15 ,$$

t et t' déterminées par les solutions

(9) $$11^2-34\cdot 2^2 = 23^2-34\cdot 4^2 = -15,$$

tandis que l'équation

$$u^2-34v^2 = -9$$

admet les deux suites coordonnées σ et σ' déterminées par les solutions

(10) $$29^2-34\cdot 5^2 = 5^2-34\cdot 1^2 = -9,$$

et les deux suites coordonnées τ et τ' de l'équation

$$u^2-34v^2 = -25$$

sont déterminées par les solutions

(11) $$99^2-34\cdot 17^2 = 3^2-34\cdot 1^2 = -25.$$

Ces définitions adoptées, on aura, en multipliant les équations (8) et (9),

$$(+)\,st = \sigma, \quad (+)\,st' = \tau$$

$$(+)\,s't' = (-)\,st' = (-)\,s't = \sigma'$$

$$(+)\,s't = (-)\,st = (-)\,s't' = \tau',$$

tandis que la multiplication de (8) et (10) donnera

$$(+)\,s'\sigma' = (-)\,s\sigma' = (-)\,s'\sigma = t, \quad (+)\,s\sigma = t',$$

et l'on trouvera des résultats analogues, en multipliant les autres équations en question.

Exemple II. $a = 10, \quad \omega = 39.$

Les suites coordonnées s et s' de l'équation

$$u^2-10v^2 = \pm 39$$

sont déterminées par les solutions

(12) $$1^2-10\cdot 2^2 = -39, \quad 17^2-10\cdot 5^2 = 39,$$

les suites coordonnées t et t' par les équations

(13) $$7^2-10\cdot 1^2 = 39, \quad 11^2-10\cdot 4^2 = -39.$$

tandis que les suites coordonnées σ et σ' de l'équation

$$u^2-10v^2 = \pm 9$$

proviennent des solutions

(14) $$1^2-10\cdot 1^2=-9,\quad 7^2-10\cdot 2^2=9$$

et les suites coordonnées τ et τ' de

$$u^2-10v^2=\pm 169$$

ont leurs premiers éléments déterminés par les solutions

(15) $$9^2-10\cdot 5^2=-169,\quad 23^2-10\cdot 6^2=169.$$

on trouve ici, en multipliant les équations (12) et (13),

$$\sigma'=(+)\,st',\quad \sigma=(+)\,s't=(+)\,st'=(-)\,st$$
$$\tau=(+)\,st,\quad \tau'=(+)\,s't=(-)\,s't'=(-)\,st',$$

tandis que la multiplication de (12) et (14) donnera

$$t=(+)\,s\sigma,\quad t'=(+)\,s'\sigma'=(-)\,s\sigma'=(-)\,s'\sigma,$$

et l'on obtiendra des résultats analogues, en multipliant les autres équations en question.

Quant aux bases paires de la forme (1), nous avons à démontrer les deux propositions suivantes:

V. L'équation de Lagrange

(16) $$u^2-av^2=(-1)^z 4p^\varrho,$$

où p est un nombre premier impair, ne peut jamais être du rang 4, à moins qu'elle ne soit décomposable.

Soient, en effet, (s, t) et (u, v) deux solutions de l'équation (16) appartenant à deux couples différents de suites coordonnées, on aura

(17) $$(su\pm atv)^2-a(sv\pm tu)^2=(-1)^\lambda 16p^{2\varrho}.$$

Or, il existe un exposant ε, tel que

(18) $$su+(-1)^\varepsilon atv=4k+2,\quad st+(-1)^\varepsilon uv=4k_1+2,$$

et ces valeurs sont nécessairement multiples de p^ϱ, parce que l'équation (17) ne peut jamais être une équation de Fermat, ce qui donnera

$$(19)\quad \left(\frac{su+(-1)^{\varepsilon}atv}{2p^{\varrho}}\right)^2-a\left(\frac{st+(-1)^{\varepsilon}uv}{2p^{\varrho}}\right)=(-1)^{\lambda}4\,;$$

c'est-à-dire que l'équation (16) est décomposable.

VI. L'équation non décomposable

$$(20)\qquad u^2-av^2=(-1)^k2^{\sigma}p^{\varrho}\,,\quad \sigma\geqq 3\,,$$

où p est un nombre premier impair, ne peut jamais être du genre 4, à moins que les deux équations

$$(21)\quad u^2-av^2=(-1)^{\lambda}2^{2\sigma-2}\,,\quad u^2-av^2=(-1)^{\lambda}p^{2\varrho}$$

ne soient résolubles.

On aura ici, avec les mêmes significations que dans le cas précédent,

$$(22)\quad \begin{cases} su+(-1)^{\varepsilon}atv=4k+2\,, & sv+(-1)^{\varepsilon}tu=4k_1+2\\ su-(-1)^{\varepsilon}atv=2^{\sigma-1}\alpha\,, & sv-(-1)^{\varepsilon}tu=2^{\sigma-1}\beta\,, \end{cases}$$

et il est évident que α et β sont premiers avec p, car soient α et β multiples de p ou, ce qui est la même chose, de p^{ϱ}, on trouvera une équation de la forme (19), ce qui est inadmissible, parce que a est de la forme $8l+1$.

Cela posé, on aura nécessairement

$$su+(-1)^{\varepsilon}atv=2p^{\varrho}\alpha_1\,,\quad sv+(-1)^{\varepsilon}tu=2p^{\varrho}\beta_1\,,$$

où α_1 et β_1 sont impairs, ce qui donnera précisément la première des équations (21).

Quant aux valeurs α et β, définies par les dernières formules (22), on aura

$$\alpha^2-a\beta^2=(-1)^{\lambda}4p^{2\varrho}\,,$$

ce qui est impossible, à moins que α et β ne soient des nombres pairs, et l'on trouvera la seconde des équations (21).

CHAPITRE III

De l'opération itérative.

XI. Opération itérative du second ordre.

Soient (s_μ, t_μ) et (σ_ν, τ_ν) des éléments quelconques de deux suites coordonnées appartenant à l'équation de LAGRANGE

$$u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta \omega ,$$

savoir

$$(1) \qquad s_\mu^2 - at_\mu^2 = (-1)^{\delta_\mu}\omega , \quad \sigma_\nu^2 - a\tau_\nu^2 = (-1)^{\varepsilon_\nu}\omega ,$$

nous avons à étudier plus profondément les multiplications positives et négatives

$$(2) \quad \begin{cases} (s_\mu s_\nu + a t_\mu t_\nu)^2 - a(t_\mu s_\nu + s_\mu t_\nu)^2 = (-1)^{\delta_\mu + \delta_\nu}\omega^2 \\ (\sigma_\mu \sigma_\nu + a\tau_\mu \tau_\nu)^2 - a(\sigma_\mu \tau_\nu + \sigma_\nu \tau_\mu)^2 = (-1)^{\varepsilon_\mu + \varepsilon_\nu}\omega^2 \\ (s_\mu \sigma_\nu - a t_\mu \tau_\nu)^2 - a(s_\mu \tau_\nu - \sigma_\nu t_\mu)^2 = (-1)^{\delta_\mu + \varepsilon_\nu}\omega^2 , \end{cases}$$

ou, écrites sous forme commune

$$(3) \qquad u^2 - av^2 = (-1)^\eta \omega^2 .$$

Nous ne savons dès à présent rien sur la résolubilité de cette équation, mais il est facile de démontrer la proposition:

I. Soit f le plus grand commun diviseur des deux nombres

$$(4) \qquad s_1^{(2)} = s_1^2 + at_1^2 , \quad t_1^{(2)} = 2s_1 t_1$$

et soit

$$(5) \qquad \omega = f\omega_1 ,$$

l'équation indéterminée

$$u_1^2 - a v_1^2 = (-1)^{\varphi} \omega_1 \tag{6}$$

est toujours résoluble.

En effet, posons $s_1^{(2)} = f u_1, \quad t_1^{(2)} = f v_1,$

u_1 et v_1 sont premiers entre eux, et il résulte, en vertu de (3), que ω est divisible par f, ce qui donnera l'équation résoluble (6).

Posons ensuite

$$\sigma_1^{(2)} = \sigma_1^2 + a\tau_1^2, \quad \tau_1^{(2)} = 2\sigma_1\tau_1, \tag{7}$$

puis appliquons les formules fondamentales

$$s_1\sigma_1 + a t_1\tau_1 = \omega A_1, \quad s_1\tau_1 + \sigma_1 t_1 = \omega B_1,$$

nous aurons, en vertu de (1),

$$(-1)^{\vartheta_1}\sigma_1 = s_1A_1 - a t_1B_1, \quad (-1)^{\vartheta_1}\tau_1 = s_1B_1 - t_1A_1$$
$$(-1)^{\varepsilon_1}s_1 = \sigma_1A_1 - a\tau_1B_1, \quad (-1)^{\varepsilon_1}t_1 = \sigma_1B_1 - \tau_1A_1,$$

ce qui donnera, après une réduction simple,

$$\left\{\begin{array}{ll} \sigma_1^{(2)} = A_2 s_1^{(2)} - aB_2 t_1^{(2)}, & \tau_1^{(2)} = B_2 s_1^{(2)} - A_2 t_1^{(2)} \\ s_1^{(2)} = A_2\sigma_1^{(2)} - aB_2\tau_1^{(2)}, & t_1^{(2)} = B_2\sigma_1^{(2)} - A_2\tau_1^{(2)}, \end{array}\right. \tag{8}$$

de sorte que nous aurons

$$s_1^{(2)}\sigma_1^{(2)} + a t_1^{(2)}\tau_1^{(2)} = \omega^2 A_2, \quad s_1^{(2)}\tau_1^{(2)} + t_1^{(2)}\sigma_1^{(2)} = \omega^2 B_2. \tag{9}$$

Cela posé, les formules (8) montrent clairement que f est aussi plus grand commun diviseur de $\sigma_1^{(2)}$ et de $\tau_1^{(2)}$, tandis qu'il résulte, en vertu des formules (9), que les deux couples

$$(s_1^{(2)}, t_1^{(2)}), \quad (\sigma_1^{(2)}, \tau_1^{(2)}) \tag{10}$$

forment, après la suppression de leur plus grand commun facteur f, deux solutions de l'équation indéterminée (6), appartenant à des suites coordonnées.

Soient maintenant (p_μ, r_μ) respectivement (π_ν, ϱ_ν) les

éléments généraux des deux suites coordonnées susdites, nous avons tout d'abord à déterminer les indices de chacune des deux solutions provenues du couple (10), et c'est une conséquence immédiate des formules (9) que ces indices sont respectivement 1 et 2.

A cet effet, supposons

$$(s_1, t_1) < (\sigma_1, \tau_1),$$

nous aurons aussi

$$(s_1^{(2)}, t_1^{(2)}) < (\sigma_1^{(2)}, \tau_1^{(2)}),$$

ce qui donnera immédiatement

$$(11)\quad \begin{cases} s_1^{(2)} = fp_1, & t_1^{(2)} = fr_1 \\ \sigma_1^{(2)} = f\pi_2, & \tau_1^{(2)} = f\varrho_2. \end{cases}$$

Cela posé, les formules récursives générales

$$s_\mu = s_1 A_{\mu-1} + a t_1 B_{\mu-1}, \quad t_\mu = s_1 B_{\mu-1} + t_1 A_{\mu-1}$$

$$\sigma_\nu = \sigma_1 A_{\nu-1} + a t_1 B_{\nu-1}, \quad \tau_\nu = s_1 B_{\nu-1} + \tau_1 A_{\nu-1}$$

donnent, après un calcul direct,

$$s_\lambda s_\mu + a t_\lambda t_\mu = s_1^{(2)} A_{\lambda+\mu-2} + a t_1^{(2)} B_{\lambda+\mu-2}$$

$$s_\lambda t_\mu + t_\lambda s_\mu = s_1^{(2)} B_{\lambda+\mu-2} + t_1^{(2)} A_{\lambda+\mu-2},$$

d'où il résulte, en vertu de (11),

$$(12)\quad s_\lambda s_\mu + a t_\lambda t_\mu = f p_{\lambda+\mu-1}, \quad s_\lambda t_\mu + t_\lambda s_\mu = f r_{\lambda+\mu-1},$$

et l'on aura, par un procédé analogue,

$$(13)\quad \sigma_\lambda \sigma_\mu + a \tau_\lambda \tau_\mu = f\pi_{\lambda+\mu}, \quad \sigma_\lambda \tau_\mu + \tau_\lambda \sigma_\mu = f\varrho_{\lambda+\mu}.$$

Quant à la troisième opération, indiquée par les formules (2), nous prenons pour point départ les formules fondamentales

$$(14)\quad s_\lambda \sigma_\nu + a t_\lambda \tau_\nu = \omega A_{\lambda+\nu-1}, \quad s_\lambda \tau_\nu + t_\lambda \sigma_\nu = \omega B_{\lambda+\nu-1},$$

et il résulte, en vertu de (12),

$$\sigma_\nu p_{\lambda+\mu-1} + a \tau_\nu r_{\lambda+\mu-1} = \omega_1 s_{\lambda+\mu+\nu-1}$$

$$\sigma_\nu r_{\lambda+\mu-1} + t_\nu p_{\lambda+\mu-1} = \omega_1 t_{\lambda+\mu+\nu-1}.$$

Cherchons ensuite, de ces deux équations, les nombres $p_{\lambda-\mu-1}$ et $r_{\lambda+\mu-1}$, puis posons

$$\lambda+\mu+\nu=\varkappa+1, \quad \varkappa>\nu,$$

nous aurons

$$(15)\quad \begin{cases} fp_{\varkappa-\nu}=(-1)^{\varepsilon_\nu}(s_\varkappa\sigma_\nu-at_\varkappa\tau_\nu) \\ fr_{\varkappa-\nu}=(-1)^{\varepsilon_\nu}(t_\varkappa\sigma_\nu-s_\varkappa\tau_\nu). \end{cases}$$

Les formules (14) donnent de même

$$s_\nu\pi_{\lambda+\mu}+at\varrho_{\lambda+\mu}=\omega_1\sigma_{\lambda+\mu+\nu-1}$$
$$s_\nu\varrho_{\lambda+\mu}+t_\nu\pi_{\lambda+\mu}=\omega_1\tau_{\lambda-\mu+\nu-1};$$

posons ensuite, comme dans le cas précédent,

$$\lambda+\mu+\nu=\varkappa+1, \quad \varkappa>\nu,$$

nous aurons ici

$$(16)\quad \begin{cases} f\pi_{\varkappa-\nu+1}=(-1)^{\delta_\nu}(s_\nu\sigma_\varkappa-at_\nu\tau_\varkappa) \\ f\varrho_{\varkappa-\nu+1}=(-1)^{\delta_\nu}(s_\nu\tau_\varkappa-t_\nu\sigma_\varkappa). \end{cases}$$

Quant au cas spécial $\varkappa=\nu$, posons, dans (14), $\lambda=\nu$, le même procédé que dans les cas précédents donnera les formules

$$(17)\quad \begin{cases} f\pi_1=(-1)^{\delta_\nu}(s_\nu\sigma_\nu-at_\nu\tau_\nu) \\ f\varrho_1=(-1)^{\delta_\nu}(s_\nu\tau_\nu-t_\nu\sigma_\nu), \end{cases}$$

valables quel que soit l'indice ν.

Cela posé, nous avons démontré le théorème fondamental:

II. Les opérations indiquées par les formules (2), conduiront, après la suppression du facteur commun f^2, à deux suites coordonnées appartenant à l'équation indéterminée (6).

Quant aux opérations que nous venons d'étudier, nous

avons encore à démontrer quelques propositions qui nous seront utiles dans ce qui suit, savoir:

III. Des équations de la forme

$$s_n s_p + a t_n t_p = k s_r , \quad s_n t_p + t_n s_p = k t_r \tag{18}$$

ne sont possibles, à moins que

$$k = \omega = 1 ; \quad s_n = A_n , \quad t_n = B_n .$$

En effet, on aura, en vertu de (18),

$$\omega^2 = k^2 \omega , \quad k^2 = \omega ;$$

de plus, on verra, en cherchant des équations (18) les nombres s_n et t_n, que k est diviseur commun de s_n et t_n, ce qui est impossible, à moins que $k = 1$, ce qui donnera $\omega = 1$.

IV. Des équations de la forme

$$s_n s_p + a t_n t_p = k A_r , \quad s_n t_p + t_n s_p = k B_r \tag{19}$$

ne sont possibles, à moins que

$$k = \omega = 2.$$

On aura, dans ce cas,

$$k^2 = \omega^2 , \quad k = \omega ;$$

de plus, soit $n > p$, on aura, en vertu de (18), et, en appliquant les formules récursives,

$$s_n^2 + a t_n^2 = \omega A_{n+r-p} , \quad 2 s_n t_n = \omega B_{n+r-p} ,$$

ce qui donnera immédiatement $\omega = 2$, parce que ω est premier et avec s_n et avec t_n.

V. Des équations de la forme

$$s_n s_p + a t_n t_p = k \sigma_r , \quad s_n t_p + t_n s_p = k \tau_r \tag{20}$$

ne sont possibles, à moins que

$$\omega = 4 , \quad k = 2.$$

On aura, comme dans la démonstration de III,

$$\omega = k^2 ;$$

de plus, les formules récursives donnent ici, pour $n > p$,

$$s_n^2 + a t_n^2 = k \sigma_{n+r-p}, \quad s_n t_n = k \tau_{n+r-p}, \tag{21}$$

de sorte qu'il résulte immédiatement $k = 2$.

Quant à l'équation indéterminée

$$u^2 - a v^2 = (-1)^\vartheta 4, \tag{22}$$

dont il s'agit ici, on aura donc, en vertu des formules générales (12) et (13),

$$\begin{cases} s_\lambda s_\mu + a t_\lambda t_\mu = 2 \sigma_{\lambda+\mu-1}, & s_\lambda t_\mu + t_\lambda s_\mu = 2 \tau_{\lambda+\mu-1} \\ \sigma_\lambda \sigma_\mu + a \tau_\lambda \tau_\mu = 2 s_{\lambda+\mu}, & \sigma_\lambda \tau_\mu + \tau_\lambda \sigma_\mu = 2 t_{\lambda+\mu}. \end{cases} \tag{23}$$

ce qui donnera, en vertu de (22),

$$\begin{cases} \sigma_{2\lambda-1} = s_\lambda^2 - (-1)^\vartheta 2, & \tau_{2\lambda-1} = s_\lambda t_\lambda \\ s_{2\lambda} = \sigma_\lambda^2 - (-1)^\varepsilon 2, & t_{2\lambda} = \sigma_\lambda \tau_\lambda ; \end{cases} \tag{24}$$

c'est-à-dire que l'on aura toujours

$$\sigma_1^2 - a \tau_1^2 = 4,$$

d'où il résulte la proposition curieuse, due à Cayley:[1]

VI. Soit, dans (22), admissible l'exposant $\delta = 1$, ou, ce qui est la même chose, soit a une base de première espèce, la plus petite solution (s_1, t_1) correspond au paramètre -4.

Nous désignons pour abréger comme opérations itératives du second ordre les formules (2) que nous venons d'étudier.

XII. Opérations itératives d'un ordre quelconque.

Soit (s_λ, t_λ) une solution quelconque de l'équation de Lagrange

$$u^2 - a v^2 = (-1)^\vartheta \omega, \tag{1}$$

nous avons, dans l'article précédent, étudié l'opération ité-

[1] Journal de Crelle, t. 53, p. 369—371; 1857.

rative du second ordre. Quant à l'opération itérative de l'ordre n, nous posons

$$(2)\quad s_\mu^{(n)} = s_\mu^{(1)} s_\mu^{(n-1)} + a\, t_\mu^{(1)} t_\mu^{(n-1)}, \quad t_\mu^{(n)} = s_\mu^{(1)} t_\mu^{(n-1)} + t_\mu^{(1)} s_\mu^{(n-1)},$$

ce qui donnera pour l'équation de Fermat

$$(3)\qquad A_\mu^{(n)} = A_{n\mu}, \quad B_\mu^{(n)} = B_{n\mu},$$

tandis que l'opération itérative du $n^{\text{ième}}$ ordre conduira à une équation de la forme

$$u^2 - av^2 = (-1)^{n\delta}\omega^n.$$

Or, on démontrera, comme dans l'article précédent, la proposition fondamentale :

I. Soit f_n le plus grand commun diviseur de $s_1^{(n)}$ et $t_1^{(n)}$, et soit

$$(4)\qquad \omega^n = f_n^2\, \omega_n,$$

l'équation de Lagrange

$$(5)\qquad u^2 - av^2 = (-1)^{n\delta}\omega_n$$

est toujours résoluble.

Posons ensuite

$$(6)\qquad s_1^{(n)} = f_n p_z^{(n)}, \quad t_1^{(n)} = f_n r_z^{(n)},$$

nous aurons généralement

$$(7)\qquad s_\mu^{(n)} = f_n p_{z+\mu n-n}, \quad t_\mu^{(n)} = f_n r_{z+\mu n-n},$$

En effet, soit $n = 2$, on aura $z = 1$ ou $z = 2$, et les formules (7), ainsi obtenues, ne sont autre chose que les formules (12) et (13) de l'article précédent, et la conclusion de n à $n+1$ est évidente.

Soit particulièrement $\omega = 2$, on aura, en vertu de la proposition II de l'article précédent,

$$(8)\quad \begin{cases} s_1^{(2n)} = 2^n A_n, & t_1^{(2n)} = 2^n B_n \\ s_1^{(2n+1)} = 2^n s_{2n+1}, & t_1^{(2n+1)} = 2^n t_{2n+1}. \end{cases}$$

Supposons maintenant $\varphi > 2$, (s_1, t_1) a une solution

réciproque (σ_1, τ_1) et les nombres $\pi_\mu^{(n)}$ et $\varrho_\mu^{(n)}$ définies par les formules

$$(9)\quad \begin{cases} \sigma_\nu^{(n)} = f_n \pi_{\lambda+\mu n-n}^{(n)}, \quad \tau_\nu^{(n)} = f_n \varrho_{\lambda+\mu n-n}^{(n)} \\ \sigma_1^{(n)} = f_n \pi_\lambda^{(n)}, \quad \tau_1^{(n)} = f_n \varrho_\lambda^{(n)} \end{cases}$$

satisfont aussi à l'équation indéterminée (5).

De plus, nous avons à démontrer le théorème fondamental:

II. Les solutions $(p_m^{(n)}, r_m^{(n)})$ et $(\pi_m^{(n)}, \varrho_m^{(n)})$ de l'équation (5) appartiennent à deux suites coordonnées, car

$$(10)\quad s_1^{(n)}\sigma_1^{(n)} + a t_1^{(n)} r_1^{(n)} = \omega^n A_n, \quad s_1^{(n)} r_1^{(n)} + t_1^{(n)}\sigma_1^{(n)} = \omega^n B_n,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(11)\quad p_z^{(n)}\pi_\lambda^{(n)} + a r_z^{(n)}\varrho_\lambda^{(n)} = \omega_n A_n, \quad p_z^{(n)}\varrho_\lambda^{(n)} + r_z^{(n)}\pi_\lambda^{(n)} = \omega_n B_n.$$

Dans l'article précédent, nous avons démontré les formules (10) et (11) qui correspondent à $n = 2$. Supposons donc vraies les formules (10), puis multiplions ces deux équations par s_1 et t_1, respectivement par t_1 et s_1, nous aurons, en additionnant les deux formules ainsi obtenues,

$$(12)\quad \begin{cases} \sigma_1^{(n)} s_1^{(n+1)} + a\tau_1^{(n)} t_1^{(n+1)} = \omega^n s_{n+1}, \\ \tau_1^{(n)} s_1^{(n+1)} + \sigma_1^{(n)} t_1^{(n+1)} = \omega^n t_{n+1}. \end{cases}$$

Multiplions ensuite par σ_1 et τ_1, respectivement par τ_1 et σ_1 ces deux formules, nous aurons, en additionnant, les formules obtenues de (10) en remplaçant n par $n+1$.

Quant aux indices z et λ qui figurent dans les formules (6) et (9), on aura, en vertu de (10) ou (11)

$$(13)\quad z + \lambda = n + 1.$$

Or, posons $\varphi = 2$, les formules (8) donnent immédiatement la proposition:

III. Soit (s_1, t_1) la plus petite des solutions ap-

partenant à la suite fermée de l'quation (1), on aura généralement

$$(14)\quad \begin{cases} z = \lambda = m, & n = 2m-1 \\ z = m, & \lambda = m+1, \quad n = 2m. \end{cases}$$

Étudions maintenant le paramètre $\varphi = 4$, les formules (23) de l'article précédent donnent

$$s_\lambda s_1 + a t_\lambda t_1 = 2\sigma_\lambda, \qquad t_\lambda s_1 + s_\lambda t_1 = 2\tau_\lambda$$

$$\sigma_\lambda \sigma_1 + a\tau_\lambda \tau_1 = 2s_{\lambda+1}, \qquad \tau_\lambda \sigma_1 + \sigma_\lambda \tau_1 = 2t_{\lambda+1},$$

de sorte qu'il résulte, en vertu des formules (24) de l'article précédent, les résultats généraux

$$(15)\quad \begin{cases} s_1^{(3n+1)} = 2^{3n} s_{n+1}, & t_1^{(3n+1)} = 2^{3n} t_{n+1} \\ s_1^{(3n+2)} = 2^{3n+1} \sigma_{n+1}, & t_1^{(3n+2)} = 2^{3n+1} \tau_{n+1} \\ s_1^{(3n+3)} = 2^{3n+3} A_{n+1}, & t_1^{(3n+3)} = 2^{3n+3} B_{n+1}. \end{cases}$$

La suite coordonnée, formée des solutions $(\sigma_\lambda, \tau_\lambda)$, donnent de même

$$(16)\quad \begin{cases} \sigma_1^{(3n+1)} = 2^{3n} \sigma_{2n+1}, & \tau_1^{(3n+1)} = 2^{3n} \tau_{2n+1} \\ \sigma_1^{(3n+2)} = 2^{3n+1} s_{2n+2}, & \tau_1^{(3n+2)} = 2^{3n+1} t_{2n+2} \\ \sigma_1^{(3n+3)} = 2^{3n+3} A_{2n+2}, & \tau_1^{(3n+3)} = 2^{3n+3} B_{2n+2}; \end{cases}$$

c'est-à-dire que nous aurons pour $\varphi = 4$

$$(17)\qquad f_{3n+1} = 2^{3n}, \quad f_{3n+2} = 2^{3n+1}, \quad f_{3n+3} = 2^{3n+3}$$

tandis que les suites $(p_\lambda^{(3n+1)}, r_\lambda^{(3n+1)})$ et $(\pi_\lambda^{(3n+1)}, \varrho_\lambda^{(3n+1)})$ coïncident avec les suites (s_λ, t_λ) et $(\sigma_\lambda, \tau_\lambda)$, et les suites $(p_\lambda^{(3n+2)}, r_\lambda^{(3n+2)})$, $\pi(_\lambda^{(3n+2)}, \varrho_\lambda^{(3n+2)})$ coïncident avec $(\sigma_\lambda, \tau_\lambda)$ et (s_λ, t_λ), et les deux suites $(p_\lambda^{(3n)}, r_\lambda^{(3n)})$ et $(\pi_\lambda^{(3n)}, \varrho_\lambda^{(3n)})$ donnent des solutions de l'équation de Fermat.

Mentionnons encore que le paramètre $\varphi = 2$ donnera

$$(18)\qquad f_{2n} = f_{2n+1} = 2^n,$$

et que la suite $(p_\lambda^{(2n)}, r_\lambda^{(2n)})$ donne des solutions de l'équa-

tion de Fermat, tandis que $(p_\lambda^{(2n+1)}, r_\lambda^{(2n+1)})$ n'est autre chose que la suite (s_λ, t_λ) elle-même.

XIII. Détermination générale du facteur f_n.

Il est très intéressant, ce me semble, que le facteur f_n qui joue un rôle fondamental dans l'opération itérative, est facile à déterminer.

A cet effet, nous avons à donner les expressions explicites des nombres $s_\lambda^{(n)}$ et $t_\lambda^{(n)}$, $\sigma_\lambda^{(n)}$ et $\tau_\lambda^{(n)}$, ce qui exige l'application des polynomes $\xi_n(\alpha)$ et $\eta_n(\alpha)$ de Cauchy, définies par les identités

$$(1) \qquad \xi_n(\cos x) = \cos nx\,, \quad \eta_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x}\,,$$

de sorte que les formules d'addition des fonctions $\cos(nx+x)$ et $\sin(nx+x)$ donnent, pour $\xi_n(\alpha)$ et $\eta_n(\alpha)$, les formules récursives

$$(2) \quad \begin{cases} \xi_{n+1}(\alpha) = \alpha\,\xi_n(\alpha) + (\alpha^2-1)\,\eta_n(\alpha) \\ \eta_{n+1}(\alpha) = \alpha\,\eta_n(\alpha) + \xi_n(\alpha)\,. \end{cases}$$

Posons ensuite

$$(3) \quad \varphi_n(\alpha,\omega) = \omega^{\frac{n}{2}}\,\xi_n\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\omega}}\right), \quad \psi_n(\alpha,\omega) = \omega^{\frac{n-1}{2}}\,\eta_n\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\omega}}\right),$$

il resulte, en vertu de (2),

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi_{n+1}(\alpha,\omega) = \alpha\,\varphi_n(\alpha,\omega) + (\alpha^2-\omega)\,\psi_n(\alpha,\omega) \\ \psi_{n+1}(\alpha,\omega) = \alpha\,\psi_n(\alpha,\omega) + \varphi_n(\alpha,\omega)\,, \end{cases}$$

et les premiers de ces polynomes deviennent

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha,\omega) &= \alpha\,, & \psi_1(\alpha,\omega) &= 1 \\ \varphi_2(\alpha,\omega) &= 2\alpha^2+\omega\,, & \psi_2(\alpha,\omega) &= 2\alpha \\ \varphi_3(\alpha,\omega) &= 4\alpha^3+3\alpha\omega\,, & \psi_3(\alpha,\omega) &= 4\alpha^2+\omega. \end{aligned}$$

Cela posé, nous avons à démontrer la proposition curieuse:

I. Soit (s_λ, t_λ) une solution quelconque de l'équa-

tion de Lagrange

(5) $$u^2 - av^2 = \varphi\,,$$

on aura, quel que soit l'indice n

(6) $$s_\lambda^{(n)} = \varphi_n(s_\lambda, \omega)\,, \quad t_\lambda^{(n)} = t_\lambda \psi_n(s_\lambda, \omega).$$

En effet, remarquons que l'équation (5) se présente sous la forme

$$av^2 = u^2 - \omega\,,$$

ou, ce qui est la même chose,

(7) $$u^2 - (u^2 - \omega)\cdot 1^2 = \omega\,,$$

il est évident que les formules (6) sont vraies pour $n = 1$.

Supposons ensuite valables, pour une certaine valeur de n, la formule

(8) $$(\varphi_n(u, \omega))^2 - (u^2 - \omega)(\psi_n(u, \omega))^2 = \omega\,,$$

nous aurons, en multipliant les équations (7) et (8), puis appliquant les formules récursives (4), les formules obtenues de (8) en y remplaçant n par $n+1$.

Enfin, introduisons, dans (8), la valeur av^2 de $u^2 - \omega$, puis posons

$$u = s_\lambda\,, \quad v = t_\lambda\,,$$

nous aurons les formules générales (6), ce qui donnera immédiatement les expressions explicites de $s_\lambda^{(n)}$ et $t_\lambda^{(n)}$, car

(9)
$$\begin{cases} \varphi_n(\alpha, \omega) = 2^{n-1}\alpha^n + \displaystyle\sum_{r=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^r n}{2r} \binom{n-r-1}{r-1} (2\alpha)^{n-2r}\omega^r \\ \psi_n(\alpha, \omega) = \displaystyle\sum_{r=0}^{< \frac{n-1}{2}} (-1)^r \binom{n-r-1}{r-1} (2\alpha)^{n-2r-1}\omega^r. \end{cases}$$

De plus, on peut obtenir des formules correspondantes pour l'équation indéterminée

$$u^2 - av^2 = -\varphi$$

en remplaçant, dans les formules précédentes, ω par $-\omega$.

Cela posé, il est facile de déterminer la valeur du facteur f_n qui correspond à l'équation indéterminée

$$u^2 - av^2 = (-1)^\delta \omega, \tag{10}$$

car on aura immédiatement les théorèmes suivants:

II. Soit, dans l'équation (10), ω un nombre impair, on aura toujours

$$f_n = 1,$$

de sorte que les équations

$$u^2 - av^2 = (-1)^{n\delta} \omega^n \tag{11}$$

sont résolubles, quel que soit le positif entier n.

En effet, remarquons que les coefficients numériques des polynomes $\varphi_n(\alpha, \omega)$ et $\psi_n(\alpha, \omega)$ sont des nombres entiers, il résulte, en vertu de (9),

$$\varphi_n(\alpha, \omega) = 2^{n-1}\alpha^n + \omega K, \quad \psi_n(\alpha, \omega) = (2\alpha)^{n-1} + \alpha K_1, \tag{12}$$

où K et K_1 sont des nombres entiers; c'est-à-dire que $\varphi_n(\alpha, \omega)$ et $\psi_n(\alpha, \omega)$ sont tous deux premiers avec le nombre impair ω, pourvu que α le soit.

Quant à l'équation (10) qui correspond à une valeur paire de ω, nous écrivons cette équation sous la forme

$$u^2 - av^2 = (-1)^\delta 2^p \omega, \tag{13}$$

où ω est de nouveau un nombre impair, ce qui donnera, en vertu de (10),

$$\varphi_n(\alpha, 2^p\omega) = 2^{n-1}\alpha^n + 2^p\omega K, \quad \psi_n(\alpha, 2^p\omega) = (2\alpha)^{n-1} + 2^p\omega K_1,$$

de sorte que f_n est toujours une puissance du premier 2, car les deux nombres impairs α et ω sont premiers entre eux.

Cela posé, nous avons à étudier séparément les trois cas suivants:

III. Soit, dans (13), $p = 1$, on aura

$$f_{2n} = f_{2n+1} = 2^n,$$

de sorte que les équations

(14) $\qquad u^2 - av^2 = \omega^{2n}, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\delta} 2\omega^{2n+1}$

sont toujours résolubles.

On aura, en effet,

$$\psi_n(\alpha, 2\omega) = \sum_{r=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^r \binom{n-r-1}{r} \alpha^{n-2r-1} \omega^r 2^{n-r-1},$$

ce qui donnera immédiatement

$$\psi_n(\alpha, 2\omega) = 2^m(2k+1), \quad n = 2m, \quad n = 2m+1.$$

IV. Soit, dans (13), $p = 2$, on aura de même

$$f_{3n+1} = 2^{3n}, \quad f_{3n+2} = 2^{3n+1}, \quad f_{3n+3} = 2^{3n+3},$$

de sorte que les équations indéterminées

$$(15) \quad \begin{cases} u^2 - av^2 = (-1)^{m\delta} 4\omega^m, & m = 3n \pm 1 \\ u^2 - av^2 = (-1)^{m\delta} \omega^m, & m = 3n \end{cases}$$

sont toujours résolubles.

Dans ce cas, la dernière des formules (9) donnera

$$\psi_n(\alpha, 4\omega) = 2^{n-1} \sum_{r=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^r \binom{n-r-1}{r} \alpha^{n-2r-1} \omega^r,$$

et il est évident que le facteur de 2^{n-1} qui figure au second membre de cette équation a la même parité quels que soient les deux nombres impairs α et ω, de sorte que l'hypothèse $\alpha = \omega = 1$ conduira immédiatement au résultat susdit.

V. Soit, dans (13), $p > 3$, on aura

$$f_n = 2^{n-1},$$

de sorte que l'équation indéterminée

$$(16) \qquad u^2 - av^2 = (-1)^{n\delta} 2^{np-2n+2} \omega^n$$

est toujours résoluble, quel que soit n.

On aura, dans ce cas, en vertu de (9),

$$\psi_n(\alpha, 2^p\omega) = 2^{n-1} \left[\alpha^{n-1} + \sum_{r=1}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^r \binom{n-r-1}{r} 2^{pr-2r} \alpha^{n-2r-1} \omega^r \right],$$

et il est évident que le facteur de 2^{n-1} qui figure au second membre de cette équation est un nombre impair.

Remarquons en passant, que la proposition V donne, comme corollaire, cette autre:

VI. Le nombre 8 est la seule valeur paire de ω, pour laquelle toutes les équations

$$u^2 - av^2 = (-1)^{n\delta}\omega^n, \tag{17}$$

soient résolubles, pourvu que l'équation qui correspond à $n = 1$ ait cette propriété.

Remarquons encore que les résultats obtenus concernant le facteur f_n donnent immédiatement la proposition curieuse:

VII. Les deux valeurs

$$\omega = 2, \quad \omega = 4$$

représentent les seuls paramètres pour lesquels l'opération itérative détermine, à l'aide d'un élément primitif, la solution complète et de l'équation proposée

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\delta}\omega$$

et de l'équation correspondante de Fermat

$$x^2 - ay^2 = (-1)^{\epsilon}.$$

En effet, l'hypothèse

$$s_\lambda^{(n)} = f_n A_n$$

donnera

$$f_n^2 = \omega^n, \tag{18}$$

et, f_n étant une puissance de 2, ω aura nécessairement la même propriété, et il est évident que la condition (18) n'est remplie, à moins que

$$\omega = 2, \quad n = 2m$$

$$\omega = 4, \quad n = 3m.$$

Quant aux hypothèses

$$s_\lambda^{(n)} = f_n s_\mu, \quad s_\lambda^{(n)} = f_n \sigma_\mu,$$

on aura de même

$$f_n^2 = \omega^{n-1},$$

ce qui donnera respectivement

$$\omega = 2, \quad n = 2m+1; \quad \omega = 4, \quad n = 3m+1$$

et

$$\omega = 4, \quad n = 3m+2.$$

Quant à la résolution complète de toutes les autres équations de Lagrange, il faut connaître ou deux solutions différentes, appartenant à chaque couple de suites coordonnées, ou la plus petite solution de l'équation correspondante de Fermat et une seule solution appartenant à chacun des couples susdits.

XIV. Des puissances d'un nombre premier.

L'opération itérative nous permet de démontrer immédiatement la proposition curieuse:

I. Supposons résolubles les deux équations de Lagrange

(1) $$u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta p^m, \quad u^2 - av^2 = (-1)^\varepsilon p^n,$$

où p est un nombre premier impair, puis désignons par f le plus grand commun diviseur de m et n, cette autre équation

(2) $$u^2 - av^2 = (-1)^\varphi p^f$$

est aussi résoluble.

On voit que le théorème est évident dans le cas spécial, où m est divisible par n. Soit ensuite

$$m = nq + r, \quad 0 < r < n,$$

les équations

$$u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta p^{nq} p^r, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{n\varepsilon} p^{nq}$$

sont toutes deux résolubles, de sorte que cette autre équation

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\vartheta + n\varepsilon} p^r$$

aura la même propriété, et, en continuant cette opération, on trouve finalement l'équation (2).

Supposons maintenant que r soit la plus petite valeur de l'exposant m, pour laquelle l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\vartheta} p^m \tag{3}$$

soit résoluble, nous disons pour abréger que p^r est la puissance primitive du nombre premier impair p qui appartient à la base a, et la proposition I donnera immédiatement cette autre:

II. Supposons résoluble l'équation (3), où p est un nombre premier impair, l'exposant m est divisible par l'exposant primitif de p qui appartient à la base a.

Quant au nombre premier 2, des théorèmes généraux analogues aux précédents ne sont pas valables, mais il est facile de démontrer cette autre proposition:

III. Supposons résolubles les deux équations de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\vartheta} 2^n, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\vartheta} 2^{n+1}, \tag{4}$$

toutes les équations

$$u^2 - uv^2 = (-1)^{\vartheta_1} 2^q, \quad q \geqq 3, \tag{5}$$

sont résolubles aussi.

Remarquons tout d'abord que les deux équations (4) ne sont pas résolubles en même temps, à moins que $n \geqq 3$, la multiplication de ces deux équations donnera immédiatement l'équation résoluble

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\vartheta + \varepsilon} 8, \tag{6}$$

et la résolubilité des équations (5) est une conséquence immédiate de la proposition VI de l'article précédent.

CHAPITRE IV

Rang et ordre des nombres.

XV. Sur le rang de certains nombres premiers.

Désignons comme ordinairement par (A_μ, B_μ) une solution quelconque de l'équation de FERMAT ayant la base a, savoir

$$A_\mu^2 - aB_\mu^2 = (-1)^{\mu\varepsilon}, \tag{1}$$

puis désignons par p un positif entier quelconque, il existe un indice r, le rang de p par rapport à la base a,[1] tel que tous les nombres B_{nr} sont multiples de p, tandis qu'aucun autre des nombres B_μ ne peut posséder cette propriété.

Remarquons, en passant, que les nombres

$$\alpha_n = A_{nr}, \quad \beta_n = \frac{1}{p} B_{nr}$$

représentent toutes les solutions de cette autre équation de FERMAT

$$x^2 - ap^2y^2 = (-1)^{r\varepsilon},$$

déduite de l'équation (1).

La détermination générale du rang d'un nombre donné est évidemment un problème très difficile, mais il est facile de démontrer les propositions suivantes:

I. Soit la base a résidu quadratique du nombre premier p, le rang de p est toujours diviseur de $p-1$.

[1] Voir mon Mémoire: Recherches sur l'Équation de Fermat, article X.

Posons pour abréger

$$p = 2\mu + 1\,,$$

les formules de Lagrange

$$A_{p-1} = \sum_{s=0}^{s=\mu} \binom{p-1}{2s} A_1^{2\mu-2s} B_1^{2s} a^s$$

$$B_{p-1} = \sum_{s=0}^{s=\mu-1} \binom{p-1}{2s+1} A_1^{2\mu-2s-1} B_1^{2s+1} a^s$$

suppléées par les congruences

$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod p, \qquad 0 \leqq k \leqq p-1,$$

donnent immédiatement

$$A_{p-1} \equiv A_1^{p-1} \sum_{s=0}^{s=\mu} \left(\frac{B_1^2\, a}{A_1^2}\right)^s \pmod p$$

$$B_{p-1} \equiv -A_1^{p-2} B_1 \sum_{s=0}^{s=\mu-1} \left(\frac{B_1^2\, a}{A_1^2}\right)^s \pmod p,$$

d'où, en vertu de (1),

$$A_{p-1} \equiv (-1)^\varepsilon (A_1^{p+1} - a^{\mu+1} B_1^{p+1}) \pmod p$$

$$B_{p-1} \equiv (-1)^{\varepsilon+1} A_1 B_1 (A_1^{p-1} - a^\mu B_1^{p-1}) \pmod p.$$

Appliquons ensuite le théorème de Fermat, nous aurons, quel que soit le nombre premier impair p,

$$A_{p-1} \equiv (-1)^\varepsilon (A_1^2 - a^{\mu+1} B_1^2) \pmod p \tag{2}$$

$$B_{p-1} \equiv (-1)^{\varepsilon+1} (1 - a^\mu) A_1 B_1 \pmod p. \tag{3}$$

Soit maintenant a résidu quadratique de p, on aura donc les congruences

$$A_{p-1} \equiv 1 \pmod p \tag{4}$$

$$B_{p-1} \equiv 0 \pmod p \tag{5}$$

dont la dernière n'est autre chose que la proposition I.

M. G. Rasch, en appliquant les formules de Lagrange

$$2aB_\mu^2 = A_{p-1} - (-1)^{\mu\varepsilon}$$
$$2A_\mu B_\mu = B_{p-1},$$

a déduit de (4) cette autre congruence

$$2aB_\mu^2 \equiv 1 - (-1)^{\mu\varepsilon} \pmod{p},$$

ce qui donnera

(6) $$B_\mu \equiv 0 \pmod{p}$$

(7) $$A_\mu \equiv 0 \pmod{p}$$

selon que $\mu\varepsilon$ est pair ou impair; c'est-à-dire que M. Rasch a démontré la proposition:

II. Soit la base a résidu quadratique du nombre premier p, et soit a une base de seconde espèce ou soit p de la forme $4\nu+1$, le rang de a est diviseur de $\frac{p-1}{2}$.

Quant à la seconde des congruences de M. Rasch, j'en ai déduit la proposition curieuse:

III. Soit la base a de première espèce résidu quadratique du nombre premier $p = 4\nu+3$, le rang de p est précisément égal à $p-1$.

En effet, supposons que le rang r du premier p soit une aliquote de $p-1$, nous aurons

$$\mu = 2\nu+1 = (2k+1)\,r;$$

c'est-à-dire que r est nécessairement un nombre impair, ce qui est impossible, parce que les nombres A_m et B_{2n+1} sont premiers entre eux.

A ces trois propositions, nous avons à ajouter une quatrième, savoir:

IV. Soit la base a de première espèce non-résidu du nombre premier $p = 4\nu+3$, le rang de p est toujours multiple de 4.

En effet, l'équation de Fermat

(8) $$A_{2n+1}^2 + 1 = aB_{2n+1}^2$$

montre clairement que le nombre premier p ne peut diviser aucun des nombres B_{2n-1}, de sorte que le rang de p est un nombre pair.

Soit ensuite le nombre

$$B_{4n+2} = A_{2n+1} B_{2n+1}$$

multiple de p, A_{2n+1} aura nécessairement la même propriété, ce qui donnera, en vertu de (8),

$$a B_{2n+1}^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

congruence qui est impossible, parce que a est non-résidu de p.

Soit par exemple $a = 2$, cette base est résidu quadratique des nombres premiers de la forme $8\mu \pm 1$ et non-résidu de $p = 8\mu \pm 3$. Le rang du nombre premier $p = 8\mu - 1$ est donc égal à $8\mu - 2$, tandis que le rang du nombre premier $8\mu + 1$ est diviseur de 4μ, et le rang du nombre premier $p = 8\mu \pm 3$ est multiple de 4.

Le nombre premier 7 est par exemple du rang 6, le nombre premier 17, au contraire, du rang 8, car

$$A_3 = 7, \quad A_4 = 17.$$

XVI. Des diviseurs réguliers.

Supposons que le diviseur d de la base a soit premier avec le nombre B_1, déterminé par l'équation de Fermat

$$A_1^2 - a B_1^2 = (-1)^{\varepsilon}, \tag{1}$$

nous disons que d est diviseur régulier de a.

Les diviseurs réguliers jouent un rôle important, dans la théorie des équations de Lagrange, comme le montrent clairement les théorèmes que nous avons à démontrer concernant cette idée.

I. Supposons que le facteur régulier d de la base a contienne les facteurs premiers $p_1\, p_2 \ldots p_r$, le nombre

(2) $$K = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_r^{\lambda_r}$$

est précisément du rang K, par rapport à la base a.

A cet effet, étudions tout d'abord la puissance p^{λ} du diviseur régulier p, les formules de Lagrange

$$A_k = A_1^k + \binom{k}{2} a B_1^2 A_1^{k-2} + \dots$$

$$B_k = \binom{k}{1} B_1 A_1^{k-1} + \binom{k}{3} a B_1^3 A_1^{k-3} + \dots$$

donnent les congruences

(2) $$A_k \equiv A_1^k \pmod{p}$$

(3) $$B_k \equiv k B_1 A_1^{k-1} \pmod{p};$$

c'est-à-dire que B_p est le premier des nombres B_k qui soit divisible par p, de sorte que p est, par rapport à la base a, précisément du rang p.

De plus, on aura, en vertu du théorème de Fermat,

(4) $$A_p \equiv A_1 \pmod{p}$$

(5) $$\frac{1}{p} B_p \equiv B_1 \pmod{p},$$

de sorte que le nombre premier p est aussi diviseur régulier de la base

(6) $$a_1 = ap^2.$$

Étudions ensuite l'équation de Fermat

(7) $$x^2 - a_1 y^2 = (-1)^{\varepsilon_1},$$

puis désignons par $(A_k^{(1)}, B_k^{(1)})$ une solution quelconque de cette équation, nous aurons

(8) $$A_k^{(1)} = A_{pk}, \quad B_k^{(1)} = \frac{1}{p} B_{pk},$$

ce qui donnera, en vertu des congruences (4) et (5),

(9) $$A_k^{(1)} \equiv A_1 \pmod{p}$$

(10) $$B_k^{(1)} \equiv B_1 \pmod{p}.$$

Cela posé, il est évident que le nombre premier p est,

par rapport à la base a_1, du rang p, de sorte que p^2 est du rang p^2, par rapport à la base a. Et la conclusion de $\lambda-1$ à λ est evidente, de sorte que la puissance p^λ est égale à son rang par rapport à la base a.

Posons généralement

$$a_\lambda = ap^\lambda, \tag{11}$$

puis désignons par $(A_k^{(\lambda)}, B_k^{(\lambda)})$ une solution quelconque de l'équation de Fermat

$$x^2 - a_\lambda y^2 = (-1)^{\varepsilon_\lambda}, \tag{12}$$

nous aurons, quel que soit l'indice λ,

$$A_k^{(\lambda)} \equiv A_k \pmod{p} \tag{13}$$

$$B_k^{(\lambda)} \equiv B_k \pmod{p}, \tag{14}$$

ce qui donnera particulièrement

$$A_1^{(\lambda)} \equiv A_{p^\lambda} \pmod{p} \tag{15}$$

$$B_1^{(\lambda)} \equiv \frac{1}{p^\lambda} B_{p^\lambda} \pmod{p}, \tag{16}$$

congruences qui nous seront très utiles dans ce qui suit.

Revenons maintenant au nombre K, défini par la formule (2), puis remarquons que chacun des facteurs

$$p_s^{\lambda_s}, \quad s = 1, 2, 3, \ldots, r,$$

premiers entre eux, est précisément égal à son rang par rapport à la base a, il est évident que le nombre K est du rang K par rapport à la base a.

De plus, l'égalité

$$\varepsilon_\lambda = \varepsilon p^\lambda$$

donnera immédiatement cette autre proposition:

II. Les deux bases a et aK^2 sont toujours de la même espèce, pourvu que K soit impair. Soit, au contraire, K un nombre pair, aK^2 est toujours une base de seconde espèce.

Supposons particulièrement que la base a et le nombre B_1 soient premiers entre eux, nous disons pour abréger que a est une base régulière, et l'application des théorèmes précédents aux bases régulières est évidente. C'est pourquoi nous nous bornerons à démontrer la proposition suivante:

III. Posons

$$B_1 = f\beta_1, \tag{17}$$

où β_1 est premier avec a, tandis que tous les facteurs premiers de f divisent aussi a, le nombre

$$a' = af^2 \tag{18}$$

est une base régulière.

En effet, remarquons que f divise tous les B_μ, puis posons

$$\alpha_\mu = A_\mu\,, \quad \beta_\mu = \frac{B_\mu}{f}, \tag{19}$$

nous aurons évidemment

$$a'\beta_\mu^2 = aB_\mu^2\,,$$

de sorte que toutes les solutions de l'équation de Fermat

$$x^2 - a'y^2 = (-1)^{\epsilon'} \tag{20}$$

se présentent sous la forme

$$x = \alpha_\mu\,, \quad y = \beta_\mu\,. \tag{21}$$

Dans l'article XVIII, nous avons à donner des applications importantes des bases régulières, applications qui exigent une étude plus approfondie des solutions d'une équation de Lagrange.

XVII. De l'ordre des positifs entiers.

Quant à l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^\delta \omega\,, \tag{1}$$

supposée résoluble, il est évident que les solutions de cette équation contiennent les solutions de celle-ci

$$u^2 - ap^2v^2 = (-1)^{\vartheta_1}\omega\,, \tag{2}$$

pourvu qu'elle soit résoluble, ce qui n'est pas toujours le cas, parce que $(-1)^{\vartheta_1}\omega$ doit être résidu quadratique de p.

Quoi qu'il en soit, supposons résolubles les deux équations (1) et (2), puis désignons par (u_q, v_q) le premier élément d'une suite S, appartenant à l'équation (1), dans lequel v_q est multiple de p, nous disons pour abréger que le nombre p appartient, dans la suite S, à l'indice q, et, cette définition adoqtée, nous avons tout d'abord à démontrer deux lemmes fondamentaux:

I. Supposons que le nombre p, du rang r par rapport à la base a, appartienne, dans une suite S de l'équation (1), à l'indice q, nous aurons toujours $q \leqq r$. De plus, soit S' la suite coordonnée de S, p appartient, dans S', à l'indice $r-q+1$.

En effet, supposons $q > r$, puis posons

$$q = rs + t\,, \quad 1 \leqq t \leqq r\,,$$

la formule récursive

$$v_q = u_t B_{rs} + v_t A_{rs}$$

montre que v_t est divisible par p, ce qui est impossible, de sorte que nous aurons nécessairement $q \leqq r$.

Soit ensuite $\omega > 2$, et soit (u'_μ, v'_μ) un élément quelconque de la suite S' coordonnée à S, on aura

$$u_q v'_{r-q+1} + v_q u'_{r-q+1} = \omega B_r\,,$$

de sorte que v'_{r-q+1} est nécessairement multiple de p, parce que p, étant diviseur de v_q, est premier avec u_q, et il est évident que v'_{r-q+1} est le premier des nombres v'_μ qui puisse être divisible par p.

Dans le cas particulier $\omega = 2$, nous disons que le nombre p est, par rapport à la suite S, de l'ordre q.

Supposons ensuite, pour $\omega > 2$, $q \leqq r-q+1$, nous

disons de même, que p est, dans le couple de suites coordonnées S et S', de l'ordre q.

Cela posé, il est facile de démontrer le second des deux lemmes susdits:

II. Supposons que le positif entier p du rang r appartienne, dans la suite S, à l'indice q, tous les nombres v_{q+rs} sont multiples de p, tandis qu'aucun autre des v_μ ne peut posséder cette propriété.

En premier lieu, il résulte immédiatement de la formule récursive

$$v_{q+rs} = v_q A_{rs} + u_q B_{rs}$$

que v_{q+rs} est multiple de p. Soit ensuite v_m, pour $m > q$, divisible par p, on aura

$$v_m = v_q A_{m-q} + u_q B_{m-q},$$

de sorte que B_{m-q} est multiple de p, ce qui donnera

$$m - q = rs, \quad m = q + rs.$$

Or, ces deux lemmes établis, il est facile de démontrer le théorème général:

III. Supposons que le positif entier p du rang r soit, dans les deux suites coordonnées S et S', de l'ordre q, les éléments

$$(3) \qquad \left(u_{q+rs}, \frac{1}{p} v_{q+rs}\right), \quad \left(u'_{r-q+rs+1}, \frac{1}{p} v'_{r-q+rs+1}\right)$$

forment un couple de suites coordonnées appartenant à l'équation (2).

Quant aux exposants δ et δ_1 qui figurent dans les équations (1) et (2), on aura

$$(4) \qquad \delta_1 = \delta + r\varepsilon,$$

où ε est déterminé par l'équation de Fermat

$$(5) \qquad A_1^2 - aB_1^2 = (-1)^\varepsilon.$$

Soit par exemple $r = 2$, on aura $q = 1$ ou $q = 2$; c'est-à-dire que le nombre p du rang 2 ne peut appartenir à

un couple de suites coordonnées S et S', à moins que v_1 et v_2' ou v_2 et v_1' ne soient multiples de p.

Généralement on peut dire que les idées du rang et de l'ordre des positifs entiers jouent un rôle fondamental dans la théorie des équations de Lagrange, ce qui est mis en pleine lumière par la proposition suivante:

IV. Supposons que les rangs r_1 et r_2 des nombres p_1 et p_2, appartenant tous deux à l'équation (1), soient premiers entre eux, le produit $p_1 p_2$ appartient aussi à cette même équation.

En effet, supposons que les nombres p_1 et p_2 appartiennent, dans une suite des solutions de l'équation (1), aux indices s_1 et s_2, les indices μ et ν des v_k qui sont multiples de p, respectivement de p_2, se présentent sous la forme

$$\mu = s_1 + r_1 z, \quad \nu = s_2 + r_2 \lambda, \tag{6}$$

donc le produit $p_1 p_2$ ne peut appartenir à la suite susdite, à moins que

$$\mu = \nu, \tag{7}$$

condition qui est à la fois nécessaire et suffisante.

Or, l'équation (7) n'est autre chose que l'équation indéterminée

$$r_1 z - r_2 \lambda = s_1 - s_2, \tag{8}$$

toujours résoluble, parce que r_1 et r_2 sont premiers entre eux.

Soit par exemple

$$z = \varrho + r_2 \mu,$$

on aura, en vertu de (8),

$$\mu = \nu = s_1 + r_1 \varrho + k r_1 r_2, \quad 0 < s_1 + r_1 \varrho \leq r_1 r_2,$$

où k est un positif entier quelconque.

Supposons, au contraire, que les rangs r_1 et r_2 aient le plus grand diviseur commun f, l'équation (8) n'est pas

résoluble, à moins que

$$s_1 - s_2 \equiv 0 \pmod{f}, \tag{9}$$

condition que permet de résoudre, aussi dans ce cas, l'équation (8),

Quant à la suite coordonnée S', p_1 et p_2 appartiennent respectivement aux indices

$$s'_1 = r_1 - s_1 + 1, \quad s'_2 = r_2 - s_2 + 1,$$

ce qui donnera

$$s'_1 - s'_2 \equiv 0 \pmod{f}.$$

Soit par exemple

$$a = 2, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 3,$$

on aura

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 4,$$

de sorte que le diviseur 6 n'appartient à un couple de suites coordonnées de l'équation

$$u^2 - 2v^2 = \pm \omega,$$

à moins que les ordres s_1 et s_2 des premiers 2 et 3 ne soient de la même parité.

Revenons maintenant à l'équation de Fermat

$$A_n^2 - aB_n^2 = (-1)^{n\varepsilon},$$

nous savons que les deux nombres A_k et B_{2n+1} sont toujours premiers entre eux, quels que soient leurs indices k et $2n+1$.

Quant à l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\vartheta}\omega, \tag{10}$$

nous trouvons une propriété analogue, savoir:

V. Un nombre du rang impair, par rapport à la base a, qui appartient à une suite (u_n, v_n) des solutions de l'équation (10) est premier avec tous les nombres u_n.

En effet, supposons que u_μ ne soit pas premier avec

le nombre p du rang impair qui appartient à la suite (u_n, v_n), il existe un indice plus grand que μ, savoir $\mu+\nu$, tel que $v_{\mu+\nu}$ est multiple de p, et nous aurons

$$v_{\mu+\nu} = u_\mu B_\nu + v_\mu A_\nu ,$$

de sorte que p et A_ν ne sont pas premiers entre eux, ce qui est impossible.

XVIII. Propriété remarquable des bases régulières.

Les développements de l'article précédent montrent clairement qu'il existe une grande analogie entre les équations de Fermat et de Lagrange. Néanmoins ces deux classes d'équations indéterminées présentent des propriétés entièrement différentes, ce qui est mis en pleine lumière par les recherches suivantes.

Supposons que le nombre p soit, par rapport à la base a, du rang r, de sorte que

$$B_r = p^z K , \tag{1}$$

où K n'est pas divisible par p, nous disons pour abréger que le nombre p est, par rapport à la base a, du rang r et de la hauteur z.

Soit maintenant ϱ un positif entier quelconque, il existe, en vertu des développements de l'article XV, des indices s, tels que

$$B_s = p^{z+\varrho} K_1 , \tag{2}$$

où K_1 n'est pas divisible par p.

Quant à l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta \omega , \tag{3}$$

l'étude des diviseurs des nombres v_μ est plus compliquée.

En effet, supposons que le nombre p appartienne, dans une suite S, à l'indice m, de sorte que

$$v_m = p^\lambda M , \tag{4}$$

où M n'est pas divisible par p, nous aurons à démontrer la proposition curieuse :

I. Soit, dans les équations (1) et (4), $\lambda < z$, tous les v_μ qui sont multiples de p, sont divisibles précisément par p^λ, de sorte qu'il n'existe aucun v_μ qui soit divisible par une autre puissance de p.

Supposons

$$v_m = p^\lambda M, \quad B_{rk} = p^z L,$$

le nombre M n'est pas divisible par p, et nous aurons, en vertu des formules récursives,

$$v_{m+rk} = p^\lambda (MA_{rk} + u_m p^{z-\lambda} L),$$

ce qui montre clairement que v_{m+rk} est, quel que soit k, divisible précisément par la puissance p^λ, parce que M et A_{rk} sont tous deux premiers avec p.

Quant à l'hypothèse $\lambda > z$, démontrons tout d'abord le lemme suivant :

II. Soit p un diviseur premier régulier de la base a, les deux équations de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^\delta \omega, \quad u^2 - ap^2 v^2 = (-1)^\varepsilon \omega \tag{5}$$

sont, pour des exposants convenables δ et ε, en même temps résolubles ou non, et, en cas de résolubilité, ces deux équations sont du même genre.

Quant à la démonstration de ce lemme fondamental, il s'agit évidemment de démontrer que le diviseur p appartient à un couple quelconque de suites coordonnées de la premières des équations (5).

A cet effet, soit (u_1, v_1) le premier élément d'une suite quelconque appartenant à l'équation susdite, la formule récursive générale

$$v_{k+1} = v_1 A_k + u_1 B_k$$

donnera, en vertu des congruences (2) et (3) de l'article XVI,

$$v_{k+1} \equiv A_1^{k-1} (A_1 v_1 + k u_1 B_1), \quad 1 \leq k \leq p-1, \tag{6}$$

et il est évident que les deux congruences

$$v_{k+1} \equiv 0 \pmod{p} \tag{7}$$

$$v_1 A_1 + k u_1 B_1 \equiv 0 \pmod{p} \tag{8}$$

sont équivalentes.

Cela posé, introduisons, dans (8), successivement

$$u_1 = 1, 2, 3, \ldots, p-1, \tag{9}$$

puis supposons les congruences ainsi obtenues satisfaites respectivement par

$$v_1 = \alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \ldots, \alpha_{p-1}^{(k)}, \tag{9}$$

il est évident que la différence

$$\alpha_\mu^{(k)} - \alpha_\nu^{(k)}, \quad \mu \neq \nu,$$

ne peut jamais être divisible par p; car on aura, dans ce cas,

$$u_1 B_1 (\mu - \nu) \equiv 0 \pmod{p},$$

ce qui est impossible, parce que $u_1 B_1$ est premier avec p, et $|\mu - \nu| < p$.

Divisons maintenant par p les nombres $\alpha_r^{(k)}$, nous aurons les restes

$$1, 2, 3, \ldots, p-1,$$

pris dans un ordre inconnu; c'est-à-dire que la congruence (8) est satisfaite par les $p-1$ couples des valeurs différentes de u_1 et v_1:

$$(1, \alpha_1^{(k)}), (2, \alpha_2^{(k)}), \ldots, (p-1, \alpha_{p-1}^{(k)}). \tag{10}$$

Démontrons ensuite que les deux congruences

$$vA_1 + k_1 u B_1 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$vA_1 + k_2 u B_1 \equiv 0 \pmod{p},$$

où $k_1 \neq k_2$, ne sont jamais satisfaites par le même couple (u, v).

On aura, en effet, dans ce cas,

$$(k_1 - k_2) u B_1 \equiv 0 \pmod{p},$$

ce qui est impossible.

Cela posé, introduisons, dans (10), successivement

$$k = 1, 2, 3, \ldots, p-1,$$

nous aurons tous les $(p-1)^2$ couples de la forme

$$(\alpha, \beta), \quad 1 \leq \alpha \leq p-1, \quad 1 \leq \beta \leq p-1,$$

et il est évident qu'il existe de telles valeurs α et β que

$$u_1 \equiv \alpha \pmod{p}, \quad v_1 \equiv \beta \pmod{p};$$

c'est-à-dire qu'un seul des nombres

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_p$$

est toujours divisible par p, de sorte que le diviseur p appartient à une suite quelconque formée des solutions de l'équation (5).

Appliquons ensuite la méthode développée dans l'article XVI, nous verrons que les deux équations

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\vartheta}\omega, \quad u^2 - ap^{2\lambda}v^2 = (-1)^{\varepsilon}\omega$$

sont en même temps résolubles ou non, et, en cas de résolubilité, elles sont du même genre.

Étudions maintenant la base régulière

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}, \tag{11}$$

où $p_1 p_2 \ldots p_r$ sont des facteurs premiers inégaux, puis posons

$$K = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}, \tag{12}$$

la méthode appliquée dans l'article XVI, donnera ici le théorème fondamental :

III. Soit a une base régulière, les deux équations indéterminées

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\vartheta_1}\omega, \quad u^2 - aK^2v^2 = (-1)^{\vartheta_2}\omega, \tag{11}$$

sont, pour des valeurs convenables des exposants ϑ_1 et ϑ_2, en même temps résolubles ou non, et, en

cas de résolubilité, les deux équations sont du même genre.

Exemple I. Le nombre $a = 10$ est une base régulière de première espèce, car l'équation de Fermat

$$x^2 - 10y^2 = \pm 1$$

donnera

$$A_1 = 3, \quad B_1 = 1,$$

de sorte que l'on aura

$$A_2 = 19, \quad B_2 = 6; \quad A_3 = 117, \quad B_3 = 37.$$

Supposons ensuite résoluble l'équation de Lagrange

$$u^2 - 10v^2 = \pm \omega, \tag{12}$$

cette autre équation

$$u^2 - 2^{2n+1} 5^{2p+1} v^2 = (-1)^{\vartheta} \omega \tag{13}$$

est aussi résoluble, quels que soient les exposants n et p, et les équations (12) et (13) sont du même genre.

Étudions un peu plus profondément l'équation spéciale da la forme (13)

$$u^2 - 1000v^2 = (-1)^{\vartheta} \omega, \tag{14}$$

puis désignons par (u_1, v_1) le premier élément d'une suite quelqonque des solutions de l'équation (12), nous pouvons nous borner à étudier le cas où u_1 et v_1 sont tous deux impairs et non multiples par 5. En effet, soit v_1 divisible par 10, nous aurons immédiatement une solution de (14); soit ensuite u_1 multiple de 5, ou soit v_1 un nombre pair, les deux nombres

$$3v_1 \pm u_1$$

sont premiers avec 10.

Or, supposons u_1 et v_1 tous deux premiers avec 10, je dis que nous aurons toujours une des quatre congruences

$$3v_1 \pm u_1 \equiv 0 \pmod{10} \tag{15}$$

$$117v_1 \pm 37u_1 \equiv 0 \pmod{10}. \tag{16}$$

En effet, supposons

$$u_1 \equiv \alpha \pmod 5, \quad v_1 \equiv \beta \pmod 5,$$

ce que nous désignons par le symbole (α, β), une des congruences (15) est satisfaite pour les 8 combinaisons

$$(1, 2),\ (2, 1),\ (1, 3),\ (3, 1),\ (2, 4),\ (4, 2),\ (3, 4),\ (4, 3),$$

tandis que qu'une des congruences (16), ou, ce qui est la même chose,

$$v_1 \pm u_1 \equiv 0 \pmod{10}$$

est satisfaite pour une des 8 combinaisons

$$(1, 1),\ (2, 2),\ (3, 3),\ (4, 4),\ (1, 4),\ (4, 1),\ (2, 3),\ (3, 2).$$

Considérons par exemple l'équation

$$u^2 - 10v^2 = \pm 39,$$

ses deux couples de suites coordonnées sont déterminés par les solutions

$$1^2 - 10 \cdot 2^2 = -39, \quad 17^2 - 10 \cdot 5^2 = 39$$

ce qui donnera, pour l'équation

$$u^2 - 1000v^2 = -39,$$

deux couples de suites coordonnées, déterminées par les solutions

$$31^2 - 1000 \cdot 1^2 = 5191^2 - 1000 \cdot 167^2 = -39.$$

Le premier de ces deux couples provient des réduites de la fraction continue qui représente $\sqrt{1000}$.

Revenons maintenant aux équations (1) et (4), dans lesquelles $\lambda \geqq z$, puis posons, dans l'équation (3),

$$a_1 = ap^{2z}, \tag{17}$$

p est un diviseur régulier de la base a_1, de sorte que p appartient à une suite quelconque des solutions de l'équation

$$u^2 - a_1 v^2 = (-1)^\epsilon \omega. \tag{18}$$

Exemple II. Soit $a = 7$, on aura $A_1 = 8$, $B_1 = 3$, de sorte que le nombre premier 2 est du rang 2 et de la hauteur 4.

L'equation de Lagrange

$$u^2 - 7v^2 = 57$$

est du rang 4, en ayant les solutions primitives

$$8^2 - 7 \cdot 1^2 = 13^2 - 7 \cdot 4^2 = 57,$$

de sorte que nous aurons

$$13^2 - 28 \cdot 2^2 = 45^2 - 28 \cdot 8^2 = 57,$$

donc l'équation

$$u^2 - 28v^2 = 57$$

est aussi du genre 4, et c'est la même chose pour

$$u^2 - 112v^2 = 57,$$

tandis que les équations

$$u^2 - 7 \cdot 2^{2n} v^2 = 57, \quad n \geq 3,$$

toujours résolubles, ne sont que du genre 2.

Exemple III. Le nombre 2 est, par rapport à la base 14, du rang 1, parce que l'on aura $A_1 = 15$, $B_1 = 4$; l'équation

$$u^2 - 14v^2 = -55$$

est du genre 4, car on aura

$$1^2 - 14 \cdot 2^2 = 29^2 - 14 \cdot 8^2 = -55,$$

c'est-à-dire que l'équation

$$u^2 - 56v^2 = -55$$

est aussi du genre 4, tandis que

$$u^2 - 224v^2 = -55, \quad u^2 - 14 \cdot 2^{2n} v^2 = -55, \quad n \geq 2$$

ne sont que du genre 2.

L'équation

$$u^2 - 14v^2 = 275$$

est du genre 4, car

$$17^2 - 14 \cdot 1^2 = 31^2 - 14 \cdot 7^2 = 275,$$

tandis que les équations

$$u^2 - 14 \cdot 2^{2n} v^2 = 275, \quad n > 1,$$

sont irrésolubles.

Exemple IV. Soit $a = 41$, on aura $A_1 = 32$, $B_1 = 5$, de sorte que le nombre premier 5 est, par rapport à la base 41, du rang 1.

L'équation de LAGRANGE

$$u^2 - 41v^2 = \pm 664$$

est du genre 4, et ses deux couples de suites coordonnées sont déterminés par les solutions

$$19^2 - 41 \cdot 5^2 = -664, \quad 75^2 - 41 \cdot 11^2 = 664,$$

donc l'équation

$$u^2 - 1025\, v^2 = \pm 664$$

n'est que du genre 2.

Ces exemples, pris au hasard dans ma Table des solutions des équations de LAGRANGE, sont typiques pour la nature de ces équations.

XIX. Des diviseurs 2, 3, 5.

La seconde partie de la Table de DEGEN qui contient les solutions A_1 et B_1 de l'équation de FERMAT

$$A_1^2 - aB_1^2 = -1 \tag{1}$$

est d'un aspect curieux, parce que beaucoup des nombres B_1 ou A_1 sont multiples de 5.

Or, ce fait curieux est une conséquence immédiate des deux propositions suivantes concernant le diviseur 5:

I. Soit a une base de première espèce de la forme $4k \pm 1$, le nombre premier 5 est, par rapport à la base a, du rang 1 ou du rang 2.

Remarquons que, dans l'équation (1), la congruence

$$A_1^2 \equiv 1 \pmod 5$$

est exclue, parce qu'elle donnera

$$aB_1^2 \equiv 2 \pmod 5,$$

ce qui est impossible. On aura donc ou

$$A_1^2 \equiv -1 \pmod 5$$

ce qui donnera

$$B_1 \equiv 0 \pmod 5,$$

de sorte que 5 est du rang 1, ou

$$A_1^2 \equiv 0 \pmod 5$$

ce qui donnera le rang de 5 égal à 2.

On voit que, dans ce cas, un des nombres B_1 et A_1 est toujours multiple de 5.

II. Soit a une base de première espèce de la forme $5k \pm 2$, le nombre premier 5 est, par rapport à la base a, du rang 1 ou du rang 3.

Dans ce cas, il est évident que A_1 ne peut jamais être multiple de 5, de sorte que l'on aura ou

$$A_1^2 \equiv -1 \pmod 5,$$

ce qui donnera

$$B_1 \equiv 0 \pmod 5,$$

et 5 est du rang 1, ou

$$A_1^2 \equiv 1 \pmod 5,$$

et la formule

$$B_3 = B_1(4A_1^2 + 1)$$

donnera immédiatement

$$B_3 \equiv 0 \pmod 5,$$

de sorte que 5 est du rang 3.

Remarquons que la proposition II donnera, comme corollaire, cette autre:

III. Soit $a = 5k \pm 2$ une base de première espèce, les nombres $5^{2n}a$ sont aussi, quel que soit l'exposant n, des bases de première espèce.

Soit maintenant $a = 5k \pm 1$ un base de seconde espèce, savoir

$$A_1^2 - B_1^2 = 1,$$

la congruence

(1) $$A_1^2 \equiv -1 \pmod 5$$

est toujours exclue, de sorte que l'on aura ou

$$A_1^2 \equiv 1 \pmod 5, \tag{2}$$

ce qui donnera

$$B_1 \equiv 0 \pmod 5$$

et 5 est du rang 1, ou

$$A_1 \equiv 0 \pmod 5, \tag{3}$$

donc 5 est du rang 2.

Dans ce cas, un des nombres A_1 et B_1 est toujours multiple de 5.

Soit ensuite $a = 5k \pm 2$ une base de seconde espèce, on aura aussi à considérer la congruence (1), de sorte que le rang du nombre 5 est égal à 1, 2 ou 3.

Quant au diviseur 3, nous avons à démontrer la proposition:

IV. Soit

$$a = 3k + l, \quad l = 1, 2 \tag{4}$$

une base de première espèce, le nombre premier 3 est, par rapport à la base a, du rang $2l$.

En effet, l'équation de Fermat donnera

$$A_1^2 = aB_1^2 - 1$$

$$A_2^2 = aB_2^2 + 1;$$

soit donc $a = 3k + 1$, on aura

$$A_1 \equiv 0 \pmod 3$$

et 3 est du rang 2, tandis que l'hypothèse $a = 3k + 2$ donne

$$A_2 \equiv 0 \pmod 3,$$

donc 3 est du rang 4, parce que

$$B_2 = 2A_1B_1$$

ne peut jamais être multiple de 3.

Quant au diviseur 3, nous avons encore à démontrer la proposition:

V. Soit $a = 3k+2$ une base de première espèce, les deux équations de LAGRANGE

(5) $$u^2 - av^2 = \pm\omega, \quad u^2 - 9av^2 = (-1)^\delta\omega$$

sont, pour une valeur convenable de l'exposant δ, en même temps résolubles ou non, et, en cas de résolubilité, elles sont du même genre.

En effet, soit (u_n, v_n) l'élément général d'une suite S appartenant à la première des équations (5), et soit v_1 multiple de 3, il est évident que le diviseur 3 appartient à la suite S. Soit ensuite u_1 multiple de 3, on aura

$$v_3 = A_2 v_1 + B_2 u_1 \equiv 0 \pmod 3,$$

car A_2 est multiple de 3.

Étudions maintenant le cas général où ni u_1 ni v_1 n'est multiple de 3, un des deux nombres

$$v_2 = v_1 A_1 + u_1 B_1$$
$$v_1' = |v_1 A_1 - u_1 B_1|$$

aura nécessairement cette propriété, et (u_1', v_1') est la solution réciproque de (u_1, v_1); c'est-à-dire que v_4 est divisible par 3.

Remarquons que les propositions II et IV donnent immédiatement cette autre:

VI. Le nombre 15 est, par rapport aux bases de première espèce de la forme $15\nu+2$ ou $15\nu+8$, du rang 12.

Quant au diviseur 2, nous avons à demontrer les deux propositions:

VII. Soit a une base paire de première espèce, la puissance 2^ν est, quel que soit l'exposant ν, égal à son rang par rapport à la base a.

Remarquons qu'une base paire de première espèce est toujours un nombre de la forme $4k+2$, il est évident que

A_1 et B_1 sont tout deux impairs, de sorte que B_2 est aussi de la forme $4l+2$; c'est-à-dire que 2 est un diviseur régulier de la base a. De plus, on aura cette autre proposition:

VIII. Soit a une base paire de première espèce, les deux équations de Lagrange

$$u^2 - av^2 = \pm\omega, \quad u^2 - 2^{2r}av^2 = (-1)^{\delta}\omega$$

sont, pour une valeur convenable de l'exposant δ, en même temps résolubles ou non, et, en cas de résolubilité, elles sont du même genre.

On voit que cette dernière proposition se présente sous une forme élégante, dans le cas spécial $a = 2$.

CHAPITRE V

Des conditions de résolubilité.

XX. Remarques générales sur la résolubilité.

Revenons maintenant à la proposition I de l'article I concernant la résolubilité d'une équation de LAGRANGE

$$u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta \omega, \tag{1}$$

puis posons

$$u = as \pm r, \tag{2}$$

il résulte, en vertu de (1),

$$(-1)^\vartheta \omega \equiv r^2 \pmod{a}, \tag{3}$$

congruence qui détermine r, et l'équation (1) donnera

$$(as \pm r)^2 - (-1)^\vartheta \omega = av^2, \tag{4}$$

équation qui permet souvent de résoudre immédiatement l'équation (1), à l'aide d'une table des nombres carrés plus petits que 100.

Posons ensuite, conformément à la congruence (3),

$$(-1)^\vartheta \omega = r^2 \pm ka, \tag{5}$$

il résulte, en vertu de (4),

$$as^2 \pm 2rs \mp k = v^2, \tag{6}$$

équation qui est souvent plus facile à résoudre que (4).

De plus, cette dernière équation (6) indique immédiatement beaucoup des cas dans lesquels l'équation (1) est irrésoluble; un de ces cas est indiqué par la proposition suivante:

I. L'équation (1) est irrésoluble, pourvu que l'on ait à la fois

(7) $$a = 4\lambda + 2, \quad k = 4\mu + 2, \quad r = 2\nu + 1.$$

En effet, il résulte, en vertu de (6), que v doit être un nombre pair; soit $v = 2v_1$, on aura donc

$$(2\lambda+1)s^2 \pm (2\nu+1)s \mp (2\mu+1) = 2{v_1}^2,$$

équation qui est impossible, parce que son premier membre est un nombre impair.

On aura de même ces deux autres propositions:

II. Soit $a = 8\nu + 1$ la puissance d'un nombre premier, l'équation de Lagrange

(8) $$u^2 - 2av^2 = \omega^2$$

est irrésoluble pour $\omega = 8\mu \pm 3$.

En effet, l'équation (8) donnera ou

$$u \pm \omega = 2p^2, \quad u \mp \omega = 4aq^2$$

ou

$$u \pm \omega = 4q^2, \quad u \mp \omega = 2ap^2$$

où nous avons posé

$$v = 2pq,$$

de sorte que p est impair, ce qui donnera respectivement

(9) $$p^2 - 2aq^2 = \pm\omega, \quad 2q^2 - ap^2 = \pm\omega,$$

donc on aura nécessairement $\omega = 8\mu \pm 1$.

III. Soit $a = 8\nu + 1$ la puissance d'un nombre premier, et soit ω^2 la puissance primitive qui correspond à la base $2a$, l'équation de Lagrange (8) n'est résoluble, à moins que

(10) $$a \pm \omega = 2z \pmod 8, \quad z = 0, 1.$$

Dans ce cas, nous avons seulement la seconde des congruences (9), et la congruence (10) est évidente.

Or, il est très curieux, ce me semble, que la proposition suivante admette beaucoup plus d'applications que les précédentes:

IV. Supposons résoluble l'équation de Lagrange

(11) $$u^2 - av^2 = (-1)^\delta p^\varrho q^\sigma,$$

où p et q sont des nombres premiers inégaux, ces deux autres équations

(12) $u^2 - av^2 = (-1)^\varkappa p^\varrho$, $u^2 - av^2 = (-1)^\lambda q^\sigma$, $\varkappa + \lambda = \delta$,

sont en même temps résolubles ou non.

En effet, supposons résoluble une des équations (12), l'équation (11) est décomposable, de sorte que la seconde des équations (12) est aussi résoluble.

Exemple I. Soit $a = 37$, $q^\varrho = 3$, j'ai annoté plus de 50 valeurs de q^σ, pour lesquelles l'équation (11) est résoluble, l'équation (12) irrésoluble, parce que

$$u^2 - 37v^2 = \pm 3$$

est irrésoluble.

Exemple II. Soit $a = 101$, $p^\varrho = 4$, je connais plus de 40 valeurs de q^σ, pour lesquelles l'équation (11) est résoluble, tandis que les équations (12) sont toutes deux irrésolubles, parce que

$$u^2 - 101\,v^2 = \pm 4$$

est irrésoluble.

XXI. Théorème sur les bases 2, 3, 5.

Dans ce qui suit, nous désignons par a un quelconque des trois nombres premiers

$$2,\ 3,\ 5,$$

par ω un nombre impair, premier avec a, et nous avons à démontrer le théorème:

I. L'équation de Lagrange

(1) $$u^2 - av^2 = (-1)^\delta \omega$$

est toujours résoluble, pourvu que a soit résidu quadratique de chacun des facteurs premiers de ω,

et que $(-1)^{\vartheta}\omega$ soit résidu quadratique de a, condition qui est à la fois nécessaire et suffisante.

Ce théorème est bien connu, au moins pour $a = 2, 3$, parce que l'on connaît une solution de l'équation (1) correspondante, mais je ne me rappelle pas avoir vu autrefois l'équation (1) qui correspond à $a = 5$.

C'est pourquoi il nous semble utile de démontrer de nouveau notre théorème, en appliquant une méthode analogue à celle des démonstrations de l'expression

$$p = x^2 + ay^2, \quad a = 1, 2, 3, 4,$$

où p est un nombre premier.

A cet effet, supposons tout d'abord que ω soit égal à un nombre premier p, de sorte que les deux conditions susdites soient remplies, il existe un positif entier $q < p$ qui satisfait à la congruence

$$q^2 \equiv a \pmod{p}.$$

De plus, il est possible de déterminer deux nombres entiérs x et y qui satisfont à la congruence

$$x^2 - q^2y^2 = (x+qy)(x-qy) \equiv 0 \pmod{p},$$

car p et q sont premiers entre eux.

Cela posé, nous aurons évidemment

$$x^2 - ay^2 = pM, \tag{2}$$

où M est un nombre entier. De plus, choisissons x et y, tels que

$$|x| < \frac{p}{2}, \quad |y| < \frac{p}{2},$$

ce qui est permis, nous aurons, en vertu de (2),

$$|M| < p,$$

car $a - 1 < 4$.

Soit maintenant $M = \pm 1$, l'équation (2) n'est autre chose que l'équation (1) pour $\omega = p$; soit, au contraire

$|M| > 1$, nous aurons, en vertu de (2),

$$(3) \qquad (x-\alpha M)^2 - a(y-\beta M)^2 = MM_1,$$

où α et β sont des positifs entiers quelconques, et où M_1 est un nombre entier, et il est facile de démontrer que l'hypothèse $M_1 = 0$ est inadmissible.

En effet, soit $M_1 = 0$, on aura, en vertu de (3),

$$x = \alpha M, \quad y = \beta M,$$

donc il résulte,

$$(\alpha^2 - a\beta^2) M = p,$$

de sorte que l'on aura nécessairement un des systèmes d'équations indéterminées

$$\alpha^2 - a\beta^2 = \pm 1, \quad M = \pm p$$
$$\alpha^2 - a\beta^2 = \pm p, \quad M = \pm 1,$$

ce qui est impossible, parce que $1 < |M| < p$.

Choisissons maintenant α et β, de sorte que

$$|x - \alpha M| < \tfrac{1}{2}|M|, \quad |y - \beta M| \leq \tfrac{1}{2}|M|,$$

ce qui est possible, l'équation (3) donnera immédiatement

$$(4) \qquad |M_1| < |M|,$$

à moins que

$$a = 5, \quad x - \alpha M = \pm \tfrac{1}{2} M, \quad y - \beta M = \pm \tfrac{1}{2} M,$$

savoir

$$a = 5, \quad x = (\alpha \pm \tfrac{1}{2}) M, \quad y = (\beta \pm \tfrac{1}{2}) M.$$

Or, introduisons, dans (2), ces trois valeurs, il résulte

$$\left[(\alpha \pm \tfrac{1}{2})^2 - 5(\beta \pm \tfrac{1}{2})^2\right] M^2 = p.$$

ce qui est impossible, parce que $1 < |M| < p$.

Cela posé, on aura, en multipliant les équations (2) et (3),

$$\left[x(x-\alpha M) - ay(y-\beta M)\right]^2 - a\left[x(y-\beta M) - y(x-\alpha M)\right]^2 = \\ = pM^2 M_1,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(\alpha x - a\beta y)^2 - a(\beta x - \alpha y)^2 = pM_1,$$

équation qui est de la même forme que (2), mais $|M_1| < |M|$.

En continuant de cette manière, on trouvera finalement une équation de la forme

$$x^2 - ay^2 = (-1)^{\delta} p, \tag{5}$$

savoir l'équation (1) pour $\omega = p$.

Remarquons maintenant que p est un nombre impair, il résulte, en vertu du théorème II de l'article XIII, que cette autre équation indéterminée

$$x^2 - ay^2 = (-1)^{n\delta} p^n, \tag{6}$$

où n désigne un positif entier quelconque, est aussi résoluble.

Enfin, supposons résolubles les ν équations de la forme (6)

$$x^2 - ay^2 = (-1)^{\delta_r} p_r^{nr}, \quad r = 1, 2, \ldots, \nu,$$

où les p_r sont des nombres premiers inégaux, nous savons, en vertu du théorème I de l'article VI, que l'équation indéterminée

$$x^2 - ay^2 = (-1)^{\delta_1 + \delta_2 \ldots + \delta_\nu} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_\nu^{n\nu} \tag{7}$$

est aussi résoluble, et cette dernière équation est précisément l'équation proposée (1).

En se rappellant que l'équation indéterminée

$$x^2 - y^2 = \omega,$$

supposée résoluble, savoir que ω n'est pas de la forme $4\lambda + 2$, n'admet qu'un nombre fini de solutions, il est bien curieux, ce me semble, que cette autre équation

$$x^2 - ay^2 = (-1)^{\delta} \omega, \quad a = 2, 3, 5,$$

supposée résoluble, n'admette pas seulement une infinité des solutions, mais, abstraction faite du cas particulier $a = 3$, $\omega = 2$, au moins deux suites infinies de solutions.

Or, notre théorème général démontré, nous avons à étudier séparément les trois valeurs susdites de la base a.

XXII. Sur la base $a = 2$.

Soit tout d'abord $a = 2$, le théorème I de l'article précédent donnera immédiatement, comme corollaire:

I. L'équation de Lagrange

$$u^2 - 2v^2 = \pm\omega \tag{1}$$

est toujours résoluble, pourvu que tous les facteurs premiers de ω soient de la forme $8\nu \pm 1$, et seulement dans ce cas.

Quant à l'équation (1), on aura la proposition curieuse:

II. Soit (u_1, v_1) l'élément primitif d'un couple quelconque de suites coordonnées appartenant à l'équation (1), on aura toujours, quel que soit le paramètre ω,

$$u_1 < v_1, \tag{2}$$

et inversement.

En effet, remarquons que la plus petite solution (A_1, B_1) de l'équation de Fermat

$$x^2 - 2y^2 \pm 1$$

est déterminée par $A_1 = B_1 = 1$, la multiplication négative donnera, en vertu de (1),

$$(u-2v)^2 - 2(u-v)^2 = \mp\omega. \tag{3}$$

Soit maintenant $u > 2v$, on aura

$$u - 2v < u, \quad u - v > v;$$

c'est-à-dire que l'indice de la solution $(u-2v, u-v)$ est plus petit que celui de (u, v).

Soit ensuite $v < u < 2v$, on aura de même

$$2v - u < u, \quad u - v < v,$$

de sorte que l'indice de la solution $(2v-u, u-v)$ est plus petit que celui de (u, v), tandis que l'hypothèse $u < v$ donnera

$$2v - u > u, \quad v - u < v;$$

c'est-à-dire que l'indice de la solution $(2v-u,\ v-u)$ est plus grand que celui de (u, v).

De plus, nous aurons à démontrer la proposition:

III. Soit (u_1, v_1) l'élément primitif d'un couple de suites coordonnées appartenant à l'équation (1), on aura toujours

$$\sqrt{\frac{\omega+1}{2}} \geq v_1 > \sqrt{\frac{\omega}{2}}. \tag{4}$$

En effet, il résulte, en vertu de (2),

$$u_1^2 - 2v_1^2 = -\omega,$$

ce qui donnera immédiatement les relations (4).

Étudions par exemple l'équation indéterminée

$$u^2 - 2v^2 = \pm 4991 = \pm 7\cdot 23\cdot 31, \tag{5}$$

nous prenons pour point de départ les deux équations

$$u^2 - 2v^2 = \pm 7, \quad u^2 - 2v^2 = \pm 23,$$

dont les solutions primitives sont déterminés par les égalités

$$1^2 - 2\cdot 2^2 = -7, \quad 3^2 - 2\cdot 4^2 = -23,$$

d'où il résulte, en multipliant ces deux équations,

$$19^2 - 2\cdot 10^2 = 161, \quad 13^2 - 2\cdot 2^2 = 161;$$

donc les éléments primitifs des deux couples de suites coordonnées de l'équation

$$u^2 - 2v^2 = \pm -161$$

sont déterminés par les égalités

$$1^2 - 2\cdot 9^2 = -161, \quad 9^2 - 2\cdot 11^2 = -161, \tag{6}$$

tandis que les solutions réciproques sont déterminées par

$$17^2 - 2\cdot 8^2 = 161, \quad 13^2 - 2\cdot 2^2 = 161.$$

Remarquons ensuite que l'équation indéterminée

$$u^2 - 2v^2 = \pm 31$$

a sa solution primitive déterminée par

$$1^2 - 2 \cdot 4^2 = -31 ,$$

il résulte, en vertu de (6), que les quatre éléments primitifs des huit suites coordonnées de l'équation (5) sont déterminés par les égalités

$$3^2 - 2 \cdot 50^2 = 29^2 - 2 \cdot 54^2 = 47^2 - 2 \cdot 60^2 = 61^2 - 2 \cdot 66^2 = -4991.$$

XXIII. Sur la base 3.

Remarquons que 3 est résidu quadratique des nombres premiers de la forme $12k \pm 1$, tandis que $12k+1$ est résidu, $12k-1$ non résidu de 3, nous aurons, en vertu du théorème I de l'article XXI:

I. L'équation de Lagrange

$$u^2 - 3v^2 = (-1)^{\vartheta} \omega , \quad \omega = 12\nu + (-1)^{\vartheta} , \tag{1}$$

est toujours résoluble, pourvu que tous les facteurs premiers de ω soient de la forme $12k \pm 1$, et seulement dans ce cas.

On voit que $\omega = 11$ est le plus petit paramètre, applicable dans l'équation (1) supposée résoluble, et l'on aura la solution primitive déterminée par

$$1^2 - 3 \cdot 2^2 = -11 ,$$

d'où il résulte, en multipliant cette équation par l'équation de Fermat

$$2^2 - 3 \cdot 1^2 = 1,$$

ces deux égalités

$$8^2 - 3 \cdot 5^2 = -11 , \quad 4^2 - 3 \cdot 3^2 = -11 ,$$

et les deux solutions de l'equation indéterminée

$$u^2 - 3v^2 = -11 , \tag{2}$$

ainsi obtenues, sont situées respectivement dans les intervalles I_3 et I_2, de sorte que tous les intervalles I_n contiennent, pour $n > 3$, précisément deux solutions de l'équation (2).

Multiplions maintenant par l'égalité

(3) $$1-3\cdot 1^2=-2,$$

l'équation (1), il résulte cette autre proposition:

II. Supposons résoluble l'équation (1), cette autre équation

(4) $$u^2-3v^2=(-1)^{\vartheta+1}2\omega,\quad \omega=12\nu+(-1)^{\vartheta},$$

est aussi résoluble, et inversement.

La multiplication susdite donnera, en effet,

$$(u\pm 3v)^2-3(u\pm v)^2=(-1)^{\vartheta+1}2\omega,$$

tandis que l'on aura, en multipliant cette dernière équation par (3),

$$\left(\frac{u\pm 3v}{2}\right)^2-3\left(\frac{u\pm v}{2}\right)^2=(-1)^{\vartheta}\omega.$$

On aura, par exemple, en vertu de (2),

$$5^2-3\cdot 1^2=7^2-3\cdot 3^2=22,$$

de sorte que tous les intervalles I_n contiennent, pour $n>2$, précisément deux solutions de l'équation

(5) $$u^2-3v^2=22$$

qui n'a aucune solution située dans l'intervalle I_1.

Quant aux équations (1) et (4), posons $\omega_1=\omega$ respectivement $\omega_1=2\omega$, nous avons à démontrer la proposition:

III. Soit (u, v) la solution primitive d'un couple de suites coordonnées appartenant à l'équation

(5) $$u^2-3v^2=-\omega_1$$

supposée résoluble, on aura toujours, quel que soit le paramètre ω_1,

(6) $$u<v,$$

ce qui donnera

(7) $$\sqrt{\frac{\omega_1+1}{3}}\geqq v>\sqrt{\frac{\omega_1}{3}}.$$

En effet, supposons $u > 2v$, la multiplication négative donnera

$$v_1 = u - 2v < v;$$

soit ensuite $2v > u > v$, on aura de même

$$v_1 = u - 2v > v,$$

tandis que l'hypothèse $u < v$ donnera

$$v_1 = 2v - u > v.$$

Cela posé, on aura, en vertu de (5),

$$v^2 + \omega_1 > 3v^2 = u^2 + \omega_1 \geq \omega_1 + 1,$$

ce qui donnera immédiatement les inégalités (7).

Étudions par exemple le paramètre

$$\omega = 143 = 11 \cdot 13,$$

les solutions

$$1^2 - 3 \cdot 2^2 = -11, \quad 4^2 - 1 \cdot 3^2 = 13$$

donnent pour l'équation indéterminée

$$u^2 - 3v^2 = -143 \tag{8}$$

les deux solutions primitives

$$2^2 - 3 \cdot 7^2 = -143, \quad 7^2 - 3 \cdot 8^2 = -143,$$

dont les solutions réciproques deviennent respectivement

$$17^2 - 3 \cdot 12^2 = -143, \quad 10^2 - 3 \cdot 9^2 = -143,$$

qui sont toutes deux situées dans l'intervalle I_3, tandis que la multiplication négative donnera

$$25^2 - 3 \cdot 16^2 = -143, \quad 38^2 - 3 \cdot 23^2 = -143.$$

On voit que la dernière de ces solutions appartient à l'intervalle I_4, tandis que la première est irrégulière, mais la multiplication positive donnera

$$98^2 - 3 \cdot 57^2 = -143,$$

et, cette solution appartenant à l'intervalle I_5, il est évident que tous les intervalles I_n contiennent, pour $n \geq 5$, précisément quatre solutions de l'équation (8).

Étudions encore, comme second exemple, l'équation

$$u^2 - 3v^2 = -506, \tag{9}$$

les deux solutions primitives

$$1^2 - 3\cdot 2^2 = -11, \quad 2^2 - 3\cdot 3^2 = -23$$

donnent immédiatement

$$16^2 - 3\cdot 1^2 = 253, \quad 20^2 - 3\cdot 7^2 = 253.$$

de sorte que l'on trouve, pour l'équation (9), les deux solutions primitives

$$1^2 - 3\cdot 13^2 = -506, \quad 13^2 - 3\cdot 15^2 = -506.$$

XXIV. Sur la base 5.

Il nous reste encore à étudier la base 5 qui est de première espèce.

A cet effet, remarquons tout d'abord que 5 est un premier de la forme $4k+1$ ayant les deux résidus quadratiques ± 1, il est évident que 5 est résidu quadratique des nombres premiers de la forme $10k \pm 1$.

Cela posé, nous aurons la proposition:

I. Soit ω un nombre impair, l'équation de Lagrange

$$u^2 - 5v^2 = \pm\omega \tag{1}$$

est toujours résoluble, pourvu que tous les facteurs premiers de ω soient de la forme $10k \pm 1$, et seulement dans ce cas.

Quant à l'équation (1), remarquons que les solutions de l'équation correspondante de Fermat

$$x^2 - 5y^2 = \pm 1$$

sont

(2, 1), (9, 4), (38, 17), (161, 72), (682, 305), ...

On voit que les nombres premiers 11 et 19 représentent les plus petites valeurs de ω pour lesquelles l'équation (1)

soit résoluble, et les plus petites solutions correspondantes

$$3^2-5\cdot 2^2=-11\,,\quad 1^2-5\cdot 2^2=-19$$

donnent

$$17^2-5\cdot 4^2=209\,,\quad 23^2-5\cdot 8^2=209.$$

Les solutions

$$4^2-5\cdot 1^2=11\,,\quad 1^2-5\cdot 2^2=19$$

donnent de même

$$6^2-5\cdot 7^2=-209\,,\quad 14^2-5\cdot 9^2=-209\,,$$

et l'on voit que la seconde de ces solutions est située dans l'intervalle I_3, tandis que la première est irrégulière.

Appliquons maintenant la multiplication positive, nous trouvons, dans l'intervalle I_4, les quatre solutions

$$47^2-5\cdot 20^2=209\,,\quad 54^2-5\cdot 25^2=-209$$
$$73^2-5\cdot 32^2=209\,,\quad 86^2-5\cdot 39^2=-209\,,$$

de sorte que tous les intervalles I_n contiennent, pour $n>4$, précisément quatre solutions de l'équation indéterminée

$$u^2-5v^2=\pm 209. \tag{2}$$

Multiplions maintenant l'équation (1) par cette autre

$$1^2-1\cdot 5^2=-4\,, \tag{3}$$

il résulte la proposition:

II. Supposons résoluble l'équation (1), cette autre équation

$$u^2-5v^2=\pm 4\omega \tag{4}$$

est aussi résoluble, et inversement.

En effet, la méthode susdite donnera

$$(u\pm 5v)^2-5\,(u\pm v)^2=\mp 4\omega\,,$$

et u et v étant de parité différente, cette équation donne deux solutions de (3).

Multiplions maintenant les équations (3) et (4), il existe un exposant σ, telle que nous aurons les deux équations résolubles

$$\left(\frac{u+(-1)^{\sigma}5v}{4}\right)^2-5\left(\frac{u+(-1)^{\sigma}v}{4}\right)^2=\pm\omega$$

$$\left(\frac{u-(-1)^{\sigma}5v}{2}\right)^2-5\left(\frac{u-(-1)^{\sigma}v}{2}\right)^2=\pm 4,$$

ce qui nous conduira de l'équation (5) à l'équation (1).

Soit par exemple $\omega = 11$, les deux équations

$$3^2-5\cdot 2^2 = 11, \quad 4^2-5\cdot 1^2 = 11$$

donnent respectivement

$$7^2-5\cdot 1^2 = 44, \quad 13^2-5\cdot 5^2 = 44$$
$$1^2-5\cdot 3^2 = -44, \quad 9^2-5\cdot 5^2 = -44,$$

de sorte que l'intervalle I_3 contient les quatre solutions

$$9^2-5\cdot 5^2 = -44, \quad 13^2-5\cdot 5^2 = 44$$
$$17^2-5\cdot 7^2 = 44, \quad 19^2-5\cdot 9^2 = -44;$$

c'est-à-dire que tous les intervalles I_n contiennent, pour $n \geq 3$, précisément quatre solutions de l'équation de Lagrange

(5) $$u^2-5v^2 = \pm 44.$$

Étudions encore l'équation

(6) $$u^2-5v^2 = \pm 836;$$

les deux couples de solutions réciproques

$$6^2-5\cdot 7^2 = -209, \quad 23^2-5\cdot 8^2 = 209$$
$$14^2-5\cdot 9^2 = -209, \quad 17^2-5\cdot 4^2 = 209$$

donnent les solutions suivantes de (6):

$$29^2-5\cdot 1^2 = 836, \quad 41^2-5\cdot 13^2 = 836$$

qui sont toutes deux irrégulières,

$$59^2-5\cdot 23^2 = 836, \quad 31^2-5\cdot 5^2 = 836,$$

appartenant à I_4 respectivement à I_2,

$$3^2-5\cdot 13^2 = -836, \quad 37^2-5\cdot 21^2 = -836$$

qui sont toutes deux irrégulières,

$$53^2-5\cdot 27^2 = -836, \quad 17^2-5\cdot 15^2 = -836$$

appartenant à I_4 respectivement à I_3.

Cela posé, on verra que l'intervalle I_5 contient les huit solutions de l'équation (6):

$$179^2 - 5 \cdot 79^2 = 836, \quad 233^2 - 5 \cdot 105^2 = -836$$
$$241^2 - 5 \cdot 107^2 = 836, \quad 281^2 - 5 \cdot 125^2 = 836$$
$$287^2 - 5 \cdot 129^2 = -836, \quad 377^2 - 5 \cdot 169^2 = 836$$
$$453^2 - 5 \cdot 203^2 = -836, \quad 629^2 - 5 \cdot 281^2 = 836,$$

de sorte que tous les intervalles I_n contiennent, pour $n > 5$, précisément huit solutions de l'équation susdite.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

Avant-Propos 3

CHAPITRE PREMIER
Des équations résolubles.

I. Définitions et propriétés fondamentales 7
II. Des suites de solutions 11
III. Des suites fermées et du paramètre 2 14
IV. Des suites coordonnées 18
V. Des bases de première espèce 22

CHAPITRE II
Genre d'une équation de Lagrange.

VI. Des multiplications positives et négatives 25
VII. Des paramètres premiers entre eux 29
VIII. Du genre d'une équation de Lagrange 34
IX. Des paramètres avec facteurs communs 37
X. Des équations du genre 4 40

CHAPITRE III
De l'operation itérative.

XI. Opération itérative du second ordre 47
XII. Opération itérative d'un ordre queleonque 52
XIII. Détermination générale du facteur f_n 56
XIV. Des puissances d'un nombre premier 61

CHAPITRE IV
Rang et ordre des nombres.

XV. Du rang de certains nombres premiers 63
XVI. Des diviseurs réguliers 66
XVII. De l'ordre des positifs entiers 69
XVIII. Propriété remarquable des bases régulières 74
XIX. Des diviseurs 2, 3, 5 81

CHAPITRE V

Des conditions de résolubilité.

Pages

XX. Remarques générales sur la résolubilité 86
XXI. Théorème sur les bases 2, 3, 5 88
XXII. Sur la base 2 92
XXIII. Sur la base 3 94
XXIV. Sur la base 5 97

Forelagt paa Mødet d. 3. November 1922.
Færdig fra Trykkeriet d. 9. Marts 1923.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **V**, 2.

SUR UNE FORMULE D'ADDITION DES POLYNOMES D'HERMITE

PAR

J. KAMPÉ DE FÉRIET

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL.
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1923

Les polynomes dérivant d'une exponentielle, définis et étudiés par HERMITE,[1] ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux; récemment M. NIELS NIELSEN[2] a consacré à leur étude approfondie un mémoire qui contient une bibliographie complète à laquelle je me contenterai de renvoyer. Je voudrais simplement montrer ici comment on peut établir, par une voie toute élémentaire, une formule d'addition très simple pour ces polynomes, formule qui ne me paraît pas néanmoins avoir encore attiré l'attention.

Les polynomes $H_n(x)$ d'Hermite[3] sont définis par le développement de la fonction génératrice:

$$e^{ax-\frac{a^2}{2}} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{a^n}{n!} H_n(x) \tag{1}$$

(qui est convergent quels que soient la constante a et la variable x), de telle sorte que l'on a:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-\frac{x^2}{2}}). \tag{2}$$

Ce polynome est de degré n et a pour expression:

[1] C. HERMITE. — Comptes Rendus t. LVIII. (1864). — p. 94—100 — ou Œuvres t. II. p. 293—308.

[2] NIELS NIELSEN. — »Recherches sur les polynomes d'Hermite« (Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. — Math.-fys. Medd. I, 6. 1918).

[3] — HERMITE désigne ses polynomes par $U_n(x)$; ils se déduisent des polynomes désignés par M. NIELS NIELSEN par $H_n(x, a)$ en y faisant $a = \frac{1}{2}$ et en les multipliant par $n!$; ce qui simplifie beaucoup les formules que je donne plus bas.

$$(3)\quad H_n(x) = x^n - \frac{n(n-1)}{2\cdot 1!}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 2!}x^{n-4} - \dots$$

Ceci étant rappelé, considérons la fonction

$$F = e^{a_1x_1+\dots+a_nx_n-\frac{1}{2}(a_1^2+\dots+a_n^2)}$$

$x_1,\dots,x_n$ désignant n variables et $a_1,\dots a_n$, n constantes quelconques.

D'une part on a:

$$F = e^{a_1x_1-\frac{a_1^2}{2}}\cdot e^{a_2x_2-\frac{a_2^2}{2}}\dots e^{a_nx_n-\frac{a_n^2}{2}}$$

D'où en développant chacune des exponentielles par la formule (1):

$$(4)\quad F = \sum_{m_1=\dots=m_n=0}^{m_1=\dots=m_n=+\infty} \frac{a_1^{m_1}}{m_1!}\dots\frac{a_n^{m_n}}{m_n!}H_{m_1}(x_1)\dots H_{m_n}(x_n).$$

D'autre part, il est clair que F s'identifie avec la fonction génératrice (1) en posant:

$$a = \sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2} \qquad x = \frac{a_1x_1+\dots+a_nx_n}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}}$$

d'ou

$$(5)\quad F = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty}\frac{1}{\mu!}(a_1^2+\dots+a_n^2)^{\frac{\mu}{2}}H_\mu\left[\frac{a_1x_1+\dots+a_nx_n}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}}\right]$$

Or il résulte de l'expression (3) que le terme de rang μ de cette dernière série est homogène de degré μ par rapport aux constantes arbitraires $a_1,\dots,a_n$.

Donc en identifiant les deux développements (4) et (5) de F:

$$(6)\quad (a_1^2+\dots+a_n^2)^{\frac{\mu}{2}}H_\mu\left[\frac{a_1x_1+\dots+a_nx_n}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}}\right] =$$

$$= \sum\frac{\mu!}{m_1!\dots m_n!}a_1^{m_1}\dots a_n^{m_n}H_{m_1}(x_1)\dots H_{m_n}(x_n)$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs positives ou nulles des entiers $m_1, \ldots, m_n$ vérifiant la relation: $m_1 + \ldots + m_n = \mu$.

Telle est la relation simple qui constitue pour les polynomes d'Hermite une véritable formule d'addition.

On peut lui donner une forme très condensée:

$$(7)\quad H_\mu\left[\frac{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right] = \left[\frac{a_1 H(x_1) + \ldots + a_n H(x_n)}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right]^\mu$$

en convenant de remplacer dans le développement du second membre une puissance telle que $[H(x_1)]^{m_1}$ par le polynome $H_{m_1}(x_1)$.

D'après la relation (2) on peut aussi écrire en utilisant le procédé symbolique bien connu:

$$(8)\quad H_\mu\left[\frac{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right] =$$

$$= (-1)^\mu e^{\frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)}\left[\frac{a_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + a_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}\right]^\mu e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)}.$$

Quelques cas particuliers de la formule (6) conduisent à des expressions curieuses, parmi lesquelles je signalerai les suivantes:

1° En faisant: $a_1 = \ldots = a_n = 1$, $x_1 = \ldots = x_n = x$ on exprime un polynome dont l'argument est $\sqrt{n}x$ en fonction des polynomes dont l'argument est x:

$$(9)\quad n^{\frac{\mu}{2}} H_\mu(\sqrt{n}x) = \sum \frac{\mu!}{m_1! \ldots m_n!} H_{m_1}(x) \ldots H_{m_n}(x)$$
$$(m_1 + \ldots + m_n = \mu).$$

2° En faisant $a_1 = \ldots = a_n = 1$ et en remplacant $x_1 \ldots, x_n$ par $\sqrt{n}x_1, \ldots, \sqrt{n}x_n$ on a d'abord:

$$n^{\frac{\mu}{2}} H_\mu(x_1 + \ldots + x_n) = \sum \frac{\mu!}{m_1! \ldots m_n!} H_{m_1}(\sqrt{n}x_1) \ldots H_{m_n}(\sqrt{n}x_n).$$

Puis en appliquant à chacun des polynomes du 2e membre la formule (9), après avoir multiplié les deux membres par $n^{\frac{\mu}{2}}$, on obtient:

$$(10) \qquad n^{\mu} H_{\mu}(x_1 + \ldots + x_n) =$$

$$= \sum \frac{\mu!}{m_{1,1}! \ldots m_{1,n}! \ldots m_{n,1}! \ldots m_{n,n}!} H_{m_{1,1}}(x_1) \ldots H_{m_{1,n}}(x_1) \ldots$$

$$H_{m_{n,2}}(x_n) \ldots H_{m_{n,n}}(x_n)$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs positives ou nulles des n^2 entiers $m_{i,j}$ vérifiant la condition: $(m_{1,1} + \ldots + m_{1,n}) + \ldots + (m_{n,1} + \ldots + m_{n,n}) = \mu$.

Le terme général contient n^2 polynomes H dont n dépendent de x_j.

Par exemple pour $n = 2$:

$$2^{\mu} H_{\mu}(x + y) = \sum \frac{\mu!}{p!\, q!\, r!\, s!} H_p(x)\, H_q(x)\, H_r(y)\, H_s(y)$$

$$(p + q + r + s = \mu)$$

3° En faisant $a_1 = x_1, \ldots, \; a_n = x_n$ on a:

$$(11) \qquad (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{\mu}{2}} H_{\mu}\left(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right) =$$

$$= \sum \frac{\mu!}{m_1! \ldots m_n!} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} H_{m_1}(x_1) \ldots H_{m_n}(x_n).$$

4° En faisant: $n = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda}$, $x_1 = x$, $x_2 = 0$, on a:

$$H_{\mu}(\lambda x) = \sum \frac{\mu!}{m!\, n!} \lambda^m (1 - \lambda^2)^n H_m(x)\, H_n(0).$$

Or de la formule (1) on tire:

$$H_{2k+1}(0) = 0 \quad H_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{k!} \frac{1}{2^k}$$

d'où

$$H_\mu(\lambda x) = \lambda^\mu H_\mu(x) - \frac{\mu(\mu-1)}{2\cdot 1!}\lambda^{\mu-2}(1-\lambda^2)H_{\mu-2}(x) +$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2^2\cdot 2!}\lambda^{\mu-4}(1-\lambda^2)^2 H_{\mu-4}(x) - \ldots$$

Si l'on rapproche cette expression de (3), il saute aux yeux que l'on peut écrire symboliquement:

$$(12) \qquad H_\mu(\lambda x) = (1-\lambda^2)^{\frac{\mu}{2}} H_\mu\left[\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} H(x)\right]$$

en convenant de remplacer dans le 2e membre une puissance telle que $[H(x)]^m$ par le polynome $H_m(x)$.

En prenant en particulier $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ on retrouve une formule donnée par M. Appell[1]:

$$H_\mu[H(x)] = 2^{\frac{\mu}{2}} H_\mu\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

5° Lorsque $n = 2$, la formule générale (6) s'écrit:

$$(a^2+b^2)^{\frac{\mu}{2}} H_\mu\left[\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right] = a^\mu H_\mu(x)\, H_0(y) +$$

$$+\frac{\mu}{1} a^{\mu-1} b\, H_{\mu-1}(x) H_1(y) + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2} a^{\mu-2} b^2 H_{\mu-2}(x) H_2(y) + \ldots$$

Or les polynomes d'Hermite rentrent dans la classe de M. Appell, c'est-à-dire que l'on a:

$$\frac{dH_n}{dx} = n\, H_{n-1}$$

et d'une manière générale:

$$\frac{1}{n!}\frac{d^k H_n}{dx^k} = \frac{1}{(n-k)!} H_{n-k}.$$

Donc:

[1] — P. Appell. — Ann. École normale 2e série t. IX. — (1880). p. 119.

$$(a^2+b^2)^{\frac{\mu}{2}} H_\mu\left[\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right] = a^\mu\left[H_\mu(x)\,H_0(y)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1}\,\frac{b}{a}\,\frac{dH_\mu}{dx}\,H_1(y)+\frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{b^2}{a^2}\,\frac{d^2H_\mu}{dx^2}\,H_2(y)+\ldots\right]$$

ce que l'on peut écrire symboliquement:

$$(13)\qquad (a^2+b^2)^{\frac{\mu}{2}} H_\mu\left[\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right] = a^\mu\, H_\mu\left[x+\frac{b}{a}\,H(y)\right]$$

en convenant toujours, dans le développement du 2e membre par la formule de Taylor, de remplacer la puissance $[H(y)]^n$ par le polynome $H_n(y)$.

6° Pour terminer je ferai remarquer qu'il existe des liaisons simples entre le produit de polynomes d'Hermite:

$$H_{m_1}(x_1)\ldots H_{m_n}(x_n)$$

— qui joue un rôle fondamental dans la formule d'addition (6), — et les polynomes hypersphériques[1] à n variables définis par la fonction génératrice:

$$(1-2a_1x_1-\ldots-2a_nx_n+a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{n+s-1}{2}} =$$

$$=\sum_{m_1=\ldots=m_n=0}^{m_1=\ldots=m_n=\infty} a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\,V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n).$$

En effet partons de la formule élémentaire;

$$2^{k-1}\Gamma(k)\,\alpha^{-k} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\frac{t^2}{2}}\,t^{2k-1}dt.$$

Faisons: $$k=\frac{n+s-1}{2},$$

$$\alpha = 1-2a_1x_1\ldots-2a_nx_n+a_1^2+\ldots+a_n^2$$

[1] — J'ai fait l'étude de ces polynomes dans ma Thèse »Sur les fonctions hypersphériques« (Paris 1915); dans le cas de $n=1$ ils se ramènent aux polynomes bien connus de Gegenbauer:

$$(1-2ax+a^2)^{-\frac{s}{2}} = \sum a^n\,V_n^{(s)}(x)$$

qui pour $s=1$ se réduisent aux polynomes de Legendre.

et développons les deux membres selon les puissances de $a_1, \ldots, a_n$; il vient en identifiant:

$$2^{\frac{n+s-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right) V^{(s)}_{m_1,\cdots,m_n}(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{t^{\mu+n+s-2}}{m_1!\ldots m_n!} H_{m_1}(tx_1)\ldots H_{m_n}(tx_n)\,dt.$$

Cette formule offre ceci de remarquable que, tandisque le polynome hypersphérique est indécomposable, la fonction sous le signe »somme« est décomposée en un produit de polynomes qui ne dépendent chacun que d'une variable.

On peut effectuer l'inversion de cette relation en partant de la formule de Hankel:

$$\frac{e^{\alpha}}{\Gamma(k)} = \frac{1}{2\pi i}\int_c e^z (z-\alpha)^{-k}\,dz$$

où c désigne un contour longeant le bord inférieur de l'axe réel depuis $-\infty$ jusqu'à 0, tournant autour de 0, puis longeant le bord supérieur de l'axe réel depuis 0 jusqu'à $-\infty$. En faisant:

$$k = \frac{n+s-1}{2} \qquad \alpha = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - \tfrac{1}{2}(a_1^2 + \ldots + a_n^2),$$

puis en développant les deux membres, on obtient:

$$\frac{2^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+s-1}{2}\right)} \frac{H_{m_1}(x_1)}{m_1!} \cdots \frac{H_{m_n}(x_n)}{m_n!} =$$

$$= \int_c e^z z^{-\frac{\mu+n+s-1}{2}} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_n}\left(\frac{x_1}{\sqrt{2z}},\ldots,\frac{x_n}{\sqrt{2z}}\right) dz.$$

Ces deux formules ont été données par M. Niels Nielsen[1] dans le cas particulier ou $n = 1$.

[1] Niels Nielsen. — Loc. cit. — p. 48.

Lille, le 25 juillet 1922.

Færdig fra Trykkeriet den 9. Marts 1923.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **V**, 3.

ON THE EFFECT OF MAGNETIC AND ELECTRIC FIELDS ON THE MERCURY SPECTRUM

BY

H. M. HANSEN, T. TAKAMINE
AND SVEN WERNER

WITH TWO PLATES AND FIGURES IN THE TEXT

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1923

§ 1. Introduction.

The quantum theory of spectra which has been developed by BOHR, SOMMERFELD and others in recent years on the basis of the BOHR theory of atomic structure has created a renewed interest in investigations of the influence of magnetic and electric fields on spectral lines. Primarily this applies to the hydrogen spectrum and to spectra of the hydrogen type. During the development of the theory of these spectra, which is now fully mastered, the greatest support has been yielded by investigations of this kind.

At present, however, investigation of the more complicated spectra claims the major interest. Already the theory can show some important results, such as the explanation of the appearance of new lines under the influence of magnetic and electric fields. But the theory of these spectra is not yet of a completed character, especially as regards the problem of the origin of the complex structure of series lines, which shows itself in the appearance of doublets and triplets etc. in the spectra of many elements. The solution of these problems will claim new research, and it is to be expected that investigations of the influence of magnetic and electric fields on the spectra will give valuable information.

Not only the purely optical research has supported the theory, but information of the highest value has been rendered to the theory through the work, commenced by FRANCK and HERTZ, on the excitation of spectral lines and

ionisation by impacts of slow electrons on atoms. As is well known, some of their first results were obtained just in mercury vapour and led to a close agreement between measured values of the energy loss of the impacting electrons and the values for the energy claimed on the quantum theory for the excitation of certain prominent lines in the mercury spectrum. Later Franck and Einsporn[1] undertook a more detailed examination by which they succeeded in discovering a far greater number of energy losses. While already in former experiments energy differences were observed corresponding to the transitions $1S—2p_2$ and $1S—2P$,[2] which give rise to the two most intense mercury absorption lines: 2537 Å and 1850 Å, the later measurements ascertained the existence of energy losses corresponding to the transitions $1S—2p_1$ and $1S—2p_3$. The record of these two transitions is of importance, since no corresponding lines have been observed in the mercury spectrum, although special research has been made.[3]

Professor N. Bohr suggested to us (in April 1921) that we test experimentally whether an external magnetic field were able to render these transitions possible, so as to observe the excited lines optically. This was the beginning of the following investigation on the disturbances in the mercury spectrum caused by external fields. Through experiments in transverse magnetic fields we succeeded in getting the line $1S—2p_1$ (2270 Å) with a considerable intensity, but no trace of the line $1S—2p_3$ (2656 Å). Our experimental arrangement did not allow us to state whether the occurrence of the line 2270 was due to a direct action of

[1] J. Franck & E. Einsporn, Zs. f. Phys., 2. p. 18 (1920).

[2] Compare, concerning the notation, table I, p. 6.

[3] A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 2. Auflage, p. XIV, Braunschweig 1921.

the magnetic field on the radiating atoms or to a secondary effect, originating in an increased action of either the electric field of the discharge or of neighbouring ions. Therefore the investigation was extended to examinations of the action of condensed discharge on the mercury spectrum and of the effect of pure magnetic and electric fields separately. The method used in the latter experiments allowed us to add to the work a detailed investigation of the Stark-effect in the mercury spectrum, of which only a few measurements of WENDT and WETZEL[1] had been previously published.

The first part of the investigations, with the single exception of the experiments in longitudinal magnetic fields, as well as the greater part of the Stark-effect experiments was made by all of us. Due to his return to Japan, Dr. T. TAKAMINE was unfortunately prevented from taking part in the completion of the work and the final discussion of the results.

§ 2. The mercury spectrum.

The arc spectrum of mercury (the *Hg I* spectrum) consists of a triplet and a singlet system. As well known, it is possible to represent each spectral line in the series spectra as the difference between two spectral terms. These terms are arranged in sequences, in the triplet systems denoted by ms; mp_1, mp_2, mp_3; md_1, md_2, md_3; mb etc. and in the singlet system by mS; mP; mD; mB etc., where m is an integer characterizing the different terms within the various sequences. The following table gives the values of the mercury terms, as found in FOWLER, Report on Series in Line Spectra, London 1922. In the following, as in

[1] G. WENDT & A. R. WETZEL, Ann. d. Phys., 50. p. 419 (1916).

Fowler's book, all the wave lengths are measured in international Ångström units and in air, while the frequencies and spectral terms are calculated for vacuum.

The notation used in the table for the spectral terms is not the same as used by Fowler, but the one adopted by Sommerfeld in the 3rd edition of »Atombau und Spektrallinien«. This notation differs only from Paschen's original one in the use of whole numbers in the *S*-sequences instead of 1,5 *S*, 2,5 *S* etc.

Table I.

The *Hg I* Spectrum.

$m =$	1	2	3	4	5	6	7	j	k
s	...	21831	10220	5965	3913	2765	2058	2	1
S	84179	20253	9777	5777	3816	...	...	1	
p_3	...	46536	14665	7735	4806	3280	2381	1	2
p_2	...	44769	14519	7714	4769	3265	2374	2	
p_1	...	40138	12974	7358	4570[1]	3158	2307	3	
P	...	30113	12886	5368	4217	3027	2238	1	
D	...	...	12848	7118	4521	3124	2288	2	3
d_3	...	...	12845	7097	4503	3110	2279	2	
d_2	...	...	12785	7073	4491	3105	2273	3	
d_1	...	...	12750	7052	4479	3096	2270	4	
b	...	...	...	6940	4434	3073*	2254*	3, 4, 5	4
e	...	...	...	...	4395*	3053*	2243*	4, 5, 6	5
f	...	...	...	...	...	(3038)*[2]	(2237)*[2]	5, 6, 7	6
g	...	...	...	...	...	...	(2216)*[2]	6, 7, 8	7
H.T.	109738	27434	12193	6859	4390	3048	2240		

H.T. denotes »hydrogen terms« as calculated by means of the Rydberg constant for mercury 109738.

* Newly measured terms (error about three units).

[1] Fowler gives 4605 (comp. p. 30).

[2] Strongly affected by electric fields, therefore very unaccurate (error more than three units). The terms are measured at the point where the corresponding lines are first seen in the field.

On the quantum theory, a spectrum of this type is assumed to be emitted by transitions between pairs among a multitude of stationary states of the atom, in which one electron moves in an orbit, the dimensions of which are large compared with the orbits of the other electrons. This orbit may be described as a plane periodic orbit, on which is superposed partly a uniform rotation in its plane, partly a precession of this plane of motion around the invariable axis of the atom. The stationary states corresponding to such motions are fixed by three quantum numbers, which may be denoted by n, k and j. The first of these may be denoted as the principal quantum number, and refers to the periodic motion mentioned, in that sense that in the limit where the precession of the orbital plane as well as the rotation in this plane vanishes, n remains as the only quantum number describing the stationary states. This number, which in the case of the hydrogen spectrum is identical with the integer number involved in the empirical expression for the spectral terms, is in the other series spectra related to the number m which fixes the position of the terms within the series, in such a way that it increases by one unit when, within such a series, we pass from one term to the next.

The introduction of the second quantum number k is necessitated by the rotation of the orbit in its plane and, together with n, k describes the motion in the stationary states in the limit where the precession of this plane vanishes, in which case $k\frac{h}{2\pi}$ is equal to the angular momentum of the electron around the centre of the orbit. For the S- and s-terms $k = 1$, for the P- and p_i-terms $k = 2$, for the D- and d_i-terms $k = 3$ etc.

The third quantum number j, the appearance of which

is connected with the precession of the orbital plane, fixes the orientation of this plane relative to the rest of the atom by the condition that the resultant angular momentum of the whole atom is equal to $j\frac{h}{2\pi}$. This quantum number discriminates between spectral terms which differ only by the indices which in the above notation are fixed to the letters p, d etc.

As regards the possible transitions between the stationary states, the correspondence principle claims that for the undisturbed atom only those transitions are possible for which k increases or decreases by one unit, and j either changes by one unit or remains unaltered. These rules are fullfilled by the spectral lines under ordinary conditions, if we ascribe to the spectral terms the values for k and j which are given in the table. In the series were $k > 3$, several values for j are stated; this means that the energy of the atom in states where the orbital plane has different orientations with regard to the inner system, does not differ materially.

For a spectrum of the type under consideration a further complication lies on the fact that the spectral terms are naturally divided into two different classes, the so-called singlet terms and the triplet terms, which may be ascribed to stationary states for which the configuration formed by the orbits of the inner electrons is different. We shall not enter more closely on these points here for which the reader may be referred to a recent paper by Professor Bohr, which contains a general theoretical discussion of the appearance of series spectra, and where also the peculiar rules of combinations between singlet and triplet terms are discussed.[1]

The effect of external fields on series spectra is according

[1] N. Bohr, Ann. d. Phys., 71. p. 228 (1923).

to the theory directly related to the change in the motion of the outer electron as a consequence of the action of the external forces. As shown by BOHR the effect of an electric field will in the first place consist in the appearance of new combination lines, which, in case of the undisturbed atom, were excluded in consequence of the above mentioned rules governing the possible variations of the quantum numbers k and j.[1] Such new lines are, as is well known, for many spectra of simpler structure, as the alkali spectra, found by STARK and his collaborators in experiments on the influence of electric fields on these spectra and are in full conformity with the theoretical expectations. For the more complicated spectra of the type of the mercury spectrum no systematic investigation has been published regarding the influence of electric fields.

On the other hand, PASCHEN and BACK[2] have recently published an important investigation on the influence of a magnetic field on triplets in the spectra of various elements by which a number of new components appeared. The existence of these is also in conformity with the principle of correspondence, when regard is had to the anomalous Zeeman-effect shown by these lines.

As mentioned in the introduction the object of the present investigation is to throw light on the problem of

[1] Compare N. BOHR, On the quantum theory of line spectra, Det Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturv. og Math. Afd., 8. Række, IV, 1. p. 36 (1918). See also H. A. KRAMERS, Intensities of spectral lines, Det Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturv. og Math. Afd., 8. Række, III, 3, p. 287 (1919), where a quantitative treatment is given of the influence of an electric field on the motion of an electron, which describes a Keplerian orbit performing a uniform precession in its plane, and where especially a detailed discussion is given of the effect of electric fields on the fine structure of the hydrogen lines.

[2] F. PASCHEN & E. BACK, Physica, 1. p. 261 (1921).

the origin of spectra of complex type by investigating the effect of electric and magnetic fields, especially as regards the appearance of new lines.

§ 3. Experiments in magnetic fields and with condensed discharge.

In these primary investigations, the object of which as mentioned was to see, if the lines $1S—2p_1$ and $1S—2p_3$ appeared in a magnetic field, a discharge tube of a construction shown in fig. 1 was employed. The electrodes were two mercury cups E_1 and E_2 with fused-in platinum wires. The electrodes were kept warm by a small alcohol flame. To the tube, which was made of Jena glass, a quartz-window R was sealed on with sealing wax. The seal was kept cool by the moist cotton at B. The capillary was about 2 cm long, with an internal diameter of about 2 mm. The tube was evacuated through the stop-cock, the final regulation of the pressure being made by the heating of the electrodes. It was only necessary sometimes, when the spectrum became too impure, to evacuate the discharge tube again. The capillary of the discharge tube was placed transversally between the poles of a Weiss magnet. The pole-ends of this magnet, one of which is indicated at fig. 1 by P, had a diameter of 1.8 cm. The intensity of the magnetic field was measured by a bismuth spiral and was about 15000 Gauss. The discharge tube was run by a large induction coil. To measure the potential between the two electrodes, a variable spark gap was inserted parallel

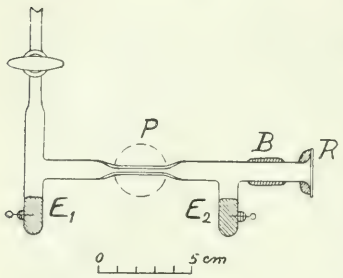

Fig. 1.

to the tube. The light from the capillary was projected, by means of two quartz-fluorite achromates from ZEISS, on the slit of a HILGER quartz spectrograph (Model E 2). To obtain the best possible definition of the spectral lines, the spectrograph was at the more intense exposures cut down to half the aperture. Both WRATTEN and WAINWRIGHT Double Instantaneous Plates and plates made by SCHUMANN's procedure[1] were used. Although the latter were somewhat more sensitive below 2300 Å, they were only used very little on account of their large grain. The time of exposure was from 10 to 30 minutes. At most of our plates a mercury spectrum without magnetic field was placed immediately besides the spectrum with magnetic field. For more accurate measurements an iron- or copper-arc comparison spectrum was placed above and beneath the mercury spectrum.

When the tube was highly evacuated, and the mercury electrodes were still at low temperature, the discharge was of a spark character; but when the mercury in E_2 was destilling into the capillary (i. e. the temperature of E_2 about 100° and of E_1 about 60°), then the discharge without magnetic field was very intensive and arc-like. With the magnetic field transversal to the capillary, the discharge was constricted and pressed against the side of the capillary by the magnetic field. To maintain the discharge through the tubes it was then necessary to force the potential very considerably. The best results were obtained with about 15000 volts across the tube.

The arc-like discharge without magnetic field showed the ordinary mercury arc spectrum (the *HgI* spectrum). Since the tube was run with the rather high potential of the induction coil, there appeared, in addition to the or-

[1] V. SCHUMANN, Ann. d. Phys., 5. p. 349 (1901).

dinary arc lines, some of the lines which are first excited in electric fields. Thus some weak lines of the type $2p_i$—mb were seen, corresponding to a variation in k of 2. Further several strong non-series lines were present, probably lines belonging to the still unanalyzed spark spectrum of mercury (the *Hg II* spectrum).

In the magnetic field on the other hand, numerous new lines appeared in the spectrum. Besides the *Hg I* spectrum and the lines assigned to the *Hg II* spectrum, which were intense, a very great number of new lines was observed. It is a probable assumption, that these last lines belong to the *Hg III* spectrum (the super spark spectrum of mercury). It is to be expected that this spectrum is extremely complicated. It is worth noting that these lines were seen particularly strong in the constricted part of the discharge.

In this constricted discharge the line $1S$—$2p_1$ (2270 Å) from the *Hg I* spectrum was easily excited. With a proper vapour pressure in the discharge tube, and a potential of about 15000 volts, the line was fairly intense. One of the best records is reproduced in fig. 2 (plate I). In the figure, two spectra are seen, the upper is without field, the lower with a transverse magnetic field of about 15000 Gauss. Most of the lines are seen in both cases; the numerous lines of the *Hg III* spectrum are too weak in this exposure to be seen in the reproduction. The marked line is $1S$—$2p_1$ and is only seen in the field-exposure. A determination of the wave length of the line, both by means of known mercury lines and compared with an iron spectrum rendered the wave length $\lambda = 2269.9 \pm 0.1$ Å. From the very accurately known spectral terms $1S$ and $2p_1$ the calculated value of $1S$—$2p_1$ is $\lambda = 2269.97 \pm 0.15$ Å. That the line is not due to some impurity seems to be beyond doubt, especi-

ally since in many of our plates, made under slightly different conditions, the impurity lines are clearly recognized. There is of course always the possibility that the observed line is a mercury spark line, but the chances are small and in our photographs the 2270 seems, to a certain degree, to behave independently of the spark lines.

The line $1S—2p_3$ is situated very near to the strong arc line 2655.13 Å. Our plates show that $1S—2p_3$ can not be present with as great an intensity as $1S—2p_1$; with the spectrograph used, it is impossible to decide if it is present with small intensity.

In this connection it is to be borne in mind that the lines in question must be expected to come out fairly intense, if there exists but a small probability for the corresponding transitions. In fact, as no spontaneous transitions from the $2p_1$- and $2p_3$-states to states of lower energy are possible, we must expect an accumulation of atoms in these meta-stable states in mercury vapour, through which a discharge is passing. Just this circumstance might be expected to make the lines in question a rather delicate means of testing the possible effect of magnetic or electric fields in producing such a probability.

The presence of the magnetic field must, however, be expected to influence the radiation of the atom, not only by the direct action of the magnetic forces, but by effects of a more indirect character. First, the higher potential necessary to force the discharge through the magnetic field, will tend essentially to increase the electric field present in the capillary, and next, the constriction of the discharge against the side of the capillary will cause an enlarged influence on the radiating atom of the forces from neighbouring ions which carry the discharge.

In order to know something about these secondary effects of the magnetic field, a helium discharge tube was arranged in a similar way between the poles of the magnet. The discharge was pressed in exactly the same manner against the side of the capillary, and the spectrum of the constricted part of the discharge showed, besides the ordinary helium spectrum, several of the new series observed by Koch [1], Liebert [2] and others in electric fields. These series ($2S$—mD, $2s$—md, $2P$—mP and $2p$—mp) show, as is allowed in electric fields by the correspondence principle, a variation in k of 0 and 2. In our helium spectra the series were followed further than by Liebert, e. g. the $2p - mp$ series to the 12th member. Contrary to Liebert, whose source of light was faint, and who accordingly had to expose several hours, our plates were only exposed about 30 minutes.

The object of these investigations was the examination of the mercury spectrum in a pure magnetic field. By the arrangement adopted we did not succeed, in so far as we got an indirect action of the magnetic field, but this action did produce the line $1S$—$2p_1$. This action must be of a complex character. To study the problem somewhat more closely we then tried the effect of electric fields on the mercury spectrum; this will be described in § 4. The investigation of the effect of a pure magnetic field was accomplished after several failures by means of the mercury lamp shown in fig. 3. The apparatus, which is made of fused silica, is arranged between the two poles of a large Hartmann and Braun magnet, in such a way that a strong magnetic field is produced longitudinal to a part of the

[1] J. Koch, Ann. d. Phys., 48. p. 98 (1915).
[2] G. Liebert, Ann. d. Phys., 56. p. 589 (1918).

discharge tube. The advantage of the longitudinal field is that there is no possibility for a constriction of the discharge as in the transversal arrangement. The two electrodes are introduced at E through the glass tubes G, which again are sealed with sealing wax to the quartz tube Q. The water jackets K keep the sealings cool. The two mercury cups C and the free part of the tube between the poles were heated by small gas flames to keep the vapour pressure sufficiently high. The discharge tube was driven

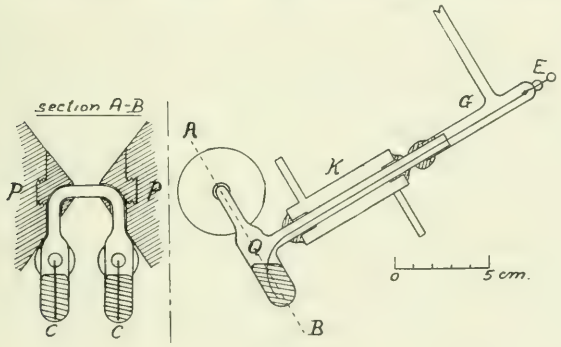

Fig. 3.

by a medium sized induction coil. The magnetic field was measured by a bismuth spiral and found to be about 19000 Gauss. A HILGER quartz spectrograph (Model E 2) was used, and in about 90 min. a very intense mercury spectrum was obtained.

Under these conditions it was found that the line $1S - 2p_1$ did not appear with an intensity the least comparable to that with which it appeared in the transverse magnetic field. The decision as to whether $1S—2p_1$ was on our plate or not, was made difficult, since the plate was very fully exposed. Therefore even the high members of the series $2p_2—ms$ were present. Now there is the unfortunate

coincidence, that the wave length of the line $2p_2$—$12s$ is 2269.9 Å (calculated), so that with our dispersion (10 Å = 1.8 mm) it is imposible to separate this line and $1S$—$2p_1$. On our plate we found a very weak line at 2269.9 Å, but a comparison of the intensity of this line with the other lines in the same series (especially $2p_2$—$11s$ and $2p_2$—$13s$) showed, that the $2p_2$—$12s$ was a little stronger than was to be expected from the decrease of intensity along the series. We therefore concluded that the line 2269.9 Å, obtained in the pure magnetic field, was due mostly to $2p_2$—$12s$ and only to a very small degree to $1S$—$2p_1$.

The effect of condensed discharge was tried in a tube of the same construction as shown in fig. 1. One or two Leyden jars (about 3000 cm) were inserted parallel to the discharge tube and a small spark gap in series with the tube. A short spark gap and high vapour pressure, i. e. too high temperature, will produce in the tube a less condensed discharge, while a low temperature gives only a very faint light. By a suitable and not too high temperature and a spark gap of 3—10 mm it was possible to get an intense condensed discharge. Since the conditions were easily kept constant for a considerable time, and the source was very intense, we made the exposures by a large Hilger quartz spectrograph (Model E 1). The maximum time of exposure was 45 minutes. The spectrum of the condensed discharge was of the same complex character as the spectrum of the constricted discharge in the transverse magnetic field. The lines of the *Hg I* spectrum were weaker, the lines of the *Hg II* and *Hg III* spectrum very strong.

The line $1S$—$2p_1$ is always excited in a condensed discharge with great intensity. The line $1S$—$2p_3$ is not seen.

Near this line (calc. $\lambda = 2655.7 \pm 0.1$ Å) is seen a weak line ($\lambda = 2655.94 \pm 0.03$ Å), but only coming in the strongest condensed discharge, while the $1S—2p_1$ is seen with the same intensity both in less and in heavy condensed discharge. It is therefore supposed, that this line is not the desired arc line, but may have its origin in the *Hg III* spectrum.

Through our investigations of the Stark-effect (comp. p. 34) we can obtain information as regards the intensities of the electric field required to produce different new lines. From the non-appearance in the condensed discharge of several $2p_i—mp_j$ combination lines, which appear even in weak electric fields, it is concluded that an effect of a homogeneous electric field stronger than about 1500 volt/cm is not active in the condensed discharge examined. A greater intensity of the electric field must be expected to cause the emission of a number of $p—p$ combinations, not observed in our condensed spectra. In the condensed discharge the main action is therefore supposed to be the influence of the rapidly changing and very inhomogeneous fields from the neighbouring atoms and ions, and no regular field effect of considerable intensity is active even in the capillary.

As a result we can consequently state, that $1S—2p_1$ is emitted in the so-called constricted and in the condensed discharge. Since the line was observed in the condensed discharge, we see that an external magnetic field is not necessary for the emission of $1S—2p_1$. That the line is observed in the transverse magnetic field (constricted discharge) seems accounted for by the obvious assumption, that the constricted discharge is of the same type as the condensed discharge. Certainly the $1S—2p_1$ was present in

the longitudinal magnetic field as a faint line, but this is easily explained by considering that it is impossible to avoid totally the action of near atomic fields on the radiating atoms. This action could be described as the condensed action. It seems therefore a justifiable conclusion, that a magnetic field (of intensity as high as 19000 Gauss) can not directly give rise to the emission of $1S-2p_1$ (and $1S-2p_3$). The condensed action, however, will cause the emission of $1S-2p_1$ and not of $1S-2p_3$. In full accord with this is the interesting fact that Lyman [1], in mercury spark, finds a line at 1404.3 Å, which most probably is the $1S-3p_1$, $\lambda_{vac} = 1404.4$ Å (calc.), while no line is found at the place of $1S-3p_3$. Wolff [2] has found in an arc the $1S-3p_2$, $\lambda_{vac} = 1435.6$ Å. The relative behaviour of the $1S-3p_i$ seems then to be exactly like that of the $1S-2p_i$.

§ 4. Investigations in homogeneous electric fields.

a. Experiments.

The investigation in pure electric fields was made by the Lo Surdo method [3], which could be applied to mercury in a very convenient manner. By this method the electric field in the cathode dark space is utilized. As the cathode is simply used a mercury surface in a narrow silica tube. The arrangement is shown in fig. 4. *BC* is a tube 20 cm long made of transparent fused silica with an inner diameter of 5—8 mm. At *B* the tube is sealed with sealing wax to the glass tube *AB* with the mercury anode *A* and the side tube *E* leading to the pump and a

[1] Th. Lyman, Spectroscopy of the Extreme Ultraviolet, p. 118, London 1914.

[2] K. Wolff, Phys. Zeitschr., 6. p. 438 (1905).

[3] A. Lo Surdo, Lincei Rend., 22. p. 664 (1913).

helium arrangement, which is described below. At *C* the tube is sealed to a narrow barometer tube, which ends in the mercury container *D*. The mercury surface, which acts as the cathode, is at *K*. In the tube was a helium atmosphere of 1—2 mm pressure. The discharge was excited by 6000—10000 volt direct-current. The part of the discharge just over the surface *K*, including the dark space, was projected on the slit of a HILGER quartz spectrograph (Model E 2) by means of two double quartz-fluorite achromates from ZEISS. In the exposures where the polarization components of the Stark-effect were to be recorded, we made use of a quartz WOLLASTON prism (a double-image prism) with glycerine between the prisms instead of canada-balsam, which absorbs in the ultraviolet. This prism could not be placed in the parallel light between the two quartz-fluorite achromates, but had to be arranged in front of the lenses on account of their rotatory power.

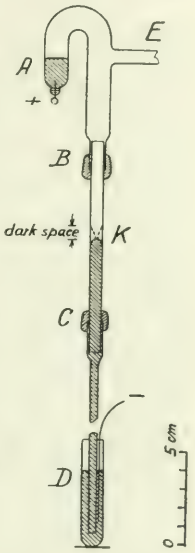

Fig. 4.

Investigations have been carried out by YOSHIDA[1] and in great detail by BROSE[2] with regard to the factors determining the distribution and maximal intensity of the electric force in the dark space. It was found that the narrower the tube the greater was the maximum intensity of the field. The pressure was of only slight influence on the intensity of the field, but the length of the dark space was very sensitive to pressure variations; a high pressure means a short dark space, a low pressure

[1] U. YOSHIDA, Mem. Coll. Sci. Kyoto, 3. p. 183 (1918).
[2] E. BROSE, Ann. d. Phys., 58. p. 731 (1919).

a long dark space. A high pressure was needed to get a great intensity of the discharge, but when the dark space became shorter than 4—5 mm, the details in the spectrograms disappeared. In our final experiments we used a tube of 6 mm diameter and the helium pressure was such that the dark space usually was about 7 mm long.

Just after the discharge was started, only the helium spectrum was seen, but in a short time (about $^1/_2$ min.) the surface of the mercury cathode K assumed its stationary state, so that the partial pressure of the mercury vapour in the space just over the cathode also reached its stationary value. At the same time the discharge constricted over the cathode on account of static charges on the silica tube, and the discharge took the shape of a cone, as shown in dotted lines in fig. 4. By this constriction there was a considerable gain in intensity of light. Furthermore it was observed that the curvature of the mercury surface was changed by the discharge.

When the tube was operated under normal conditions, the pressure was controlled by the length of the dark space. This length was measured in a telescope with an eyepiece micrometer. The telescope, which was very solidly placed, served also to keep the surface of the mercury constant, undisturbed by the alterations in the pressure of the outer atmosphere. Due to the barometer-like arrangement of the cathode, this was of course very sensitive to changes in the barometer height. It is most important to keep the surface very constant, so that it is always projected at the same point of the slit of the spectrograph. The adjustment of the mercury surface was made by means of a rack and pinion mechanism operated from near the telescope. In this way, by keeping the mercury surface

and the length of dark space constant within a fraction of a millimeter, it was possible to reproduce the same conditions day after day and continue the exposure through several days.

Besides the small adjustments which changes in the height of the barometer necessitated, it was usually necessary, after about 6 hours exposure to shift the tube relative to the surface, because at the sides of the tube in the dark space a black deposit was formed, which, in addition to the screening of the light, also brought out the disturbing flashes, later to be mentioned. Since the mercury surface had to keep its position relative to the spectrograph, the tube was moved. To facilitate this movement, the tube *ABCE* was also mounted on a rack and pinion arrangement, and the connection between *E* and the pump etc. was made through a number of bent glass tubes with GAEDE normal joints. A charcoal tube was inserted near *E*, which together with a thermos bottle with liquid air, followed the movements of the discharge tube. The black deposit could, however, be removed without taking down the whole arrangement by merely heating the silica tube with a small blow pipe to an incipient red glow.

The tube was run, as mentioned above, with high-tension direct-current supplied from two 3 KW 6000 volt direct-current dynamos, which were connected in series. The cathode *K* was connected to earth, the anode *A* at a potential from 6—9000 volts. The occurrence of »flashes« in the discharge tube caused great difficulty in the beginning. At first when we only had a comparatively low resistance in series with the tube, the flashes were very strong and had a tendency to form a real arc discharge of great intensity. Usually they stopped after a few seconds,

but their intense light would spoil the exposures. The probable reason for these flashes seemed to be minute contaminations on the mercury surface or at the tube, acting as Wehnelt cathodes. Therefore it was possible by cleaning the tube and the mercury most carefully to diminish the flashing considerably. When the pressure is low, it is easy to avoid the flashes, but at the pressures where the luminosity of the tube is fairly good, the flashing begins to give trouble.

As a high-tension resistance we used at first a number of 220 volt 10 C. P. metal filament lamps connected in series. They were found to be, on account of their characteristics, especially convenient for this purpose. With a weak current they have only a small resistance, so that the tube will receive nearly the full tension of the dynamos; but when in the case of a short circuit by a flash the current rises in the tube, then the resistance of the lamps increases and the shock is stopped. The number of lamps was regulated so that for the total tension of the dynamos they allowed only a current of about 30 milli-amperes to pass. Under this condition there was no danger to the tube on account of the flashes, but yet they were too disturbing. The best way of suppressing them was by means of a very large resistance (2—5 meg-ohm), so that the current, even by short-circuiting of the tube did not exceed 3 milliamperes. The flashes were then very short and did not affect the exposure. When the discharge was going on normally, the current was below $^1/_2$ milliampere, and the drop of potential in the resistance was smaller than 2000 volts. This very high resistance was made of pencil lines on a ground glass plate. Though we succeeded in avoiding the flashes to some extent, they still determi-

ned a limit above which we could not force the current and therefore the intensity of light.

To get intense spectra we were therefore compelled to prolong the exposures very much which of course made them rather fatiguing, as they demanded constant attendance in order to look after the flashes and the adjustments of the mercury surface and the tube. The longest exposure

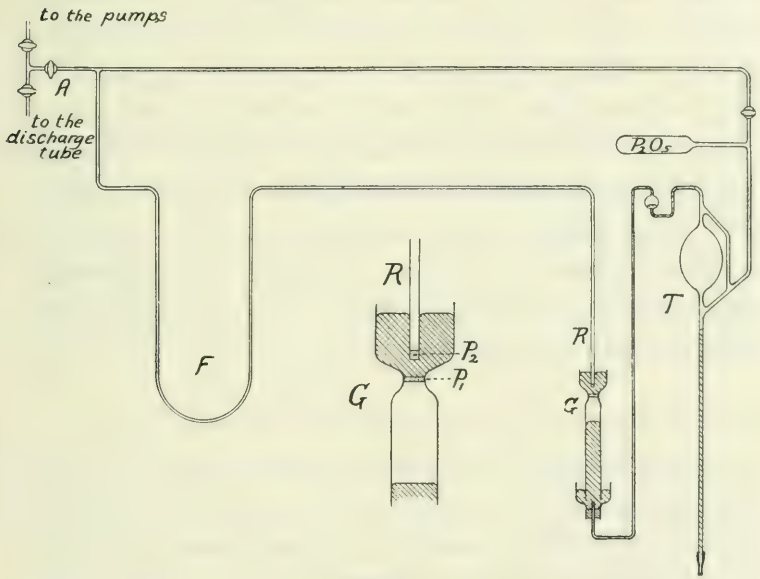

Fig. 5.

was 47 hours divided on 5 days. During the long exposures two quartz spectrographs were sometimes exposed at the same time (HILGER's model E 1 and E 2). However, it is seen from the following reproductions, that in spite of the long duration of the exposure, the definition of the lines was very satisfying. It is to be mentioned, that the temperature in the room where the experiments took place was kept nearly constant during an exposure.

The helium arrangement we used was very convenient and has been used in several other investigations, but has never been described. It affords an example of the very ingenious porous contact by K. Prytz [1]. Fig. 5 shows the arrangement schematically. The helium is kept in the gasometer G over mercury. The upper part of G is shown in greater detail. P_1 is a porous plate of the material used by Stock [2], which can be fused into glass. In the mercury above P_1 is the tube R which ends in a similar porous plug P_2. The long connection from R to A is bent at F, so as to be flexible. When R is lowered so much that P_1 and P_2 touche, then the helium can diffuse from P_1 to P_2. The great advantage of this arrangement is that it is easy by a short contact between P_1 and P_2 to take very small amounts of helium into the apparatus. After the experiment the helium is taken back to the gasometer again with the mercury pump T.

b. Results.

In figs. 6 (plate I) and 7 (plate II) are reproduced some of our records of the Stark-effect in mercury. In fig. 6 is shown a part of the mercury spectrum between 2700 Å and 2250 Å. Since we have projected the image of the vertical discharge tube on the slit of the spectograph, then every point of a spectral line will correspond to a point in the discharge tube. The lower end of a spectral line, as shown in the reproductions, corresponds to points in the dark space near the mercury surface, while the other end of the lines correspond to points in the negative glow, i. e. a little higher than the end of the dark space. The intensity

[1] K. Prytz, Ann. d. Phys., 18. p. 617 (1905).
[2] A. Stock, Chem. Ztg. (1908).

of the electric field will be a maximum very near the mercury surface, and here the spectral lines will also be most affected. The electric field in the dark space decreases gradually by increasing the distance from the cathode, and when the negative glow is reached, the intensity of the field is very small, and accordingly the spectrum is here of a normal appearance. The advantage of the LO SURDO method is that a spectrum is thus obtained in which we have the spectral lines, both as they are emitted normally and in all strengths of the field up to the maximum field. It is then very easy to follow the development of the Stark-effect with increasing field. The maximum field in fig. 6 was about 35000 volt/cm. Most of the spectral lines seen on the reproductions are lines which are excited by transitions from large orbits to one of the three $2p_1$-, $2p_2$- and $2p_3$-orbits. The lines may then be represented by the formula $2p_i$-mq, where $i = 1, 2, 3$ and mq is written for ms, mp_i, md_j, mb, etc.

The exposures revealed a number of facts which allow of an immediate interpretation on the basis of the theory. According to the theory the effect on the lines is directly related to the change of the orbit of the outer electron under the influence of the electric forces. Now the character and magnitude of this change depends in the first place on the deviation of the orbit from a simple Keplerian orbit. In fact, if the orbit of the outer electron as in hydrogen were of the latter periodic type, the deformation produced by the force would so to speak accumulate from one revolution to the next, resulting, even for small intensity of the force, in a considerable change in the shape and orientation of the orbit. If on the other hand, the orbit under the influence of the inner electrons undergoes rapid varia-

tions in orientation, the effect of the external forces will only be allowed to accumulate within time intervals of the same order of magnitude as the period of these variations. We shall therefore expect that the effect of the electric field on a spectral line will be smaller the larger the difference between the spectral terms under consideration and the hydrogen terms with the same principal quantum numbers. In fact, this difference gives a measure for the frequency with which these variations in the orientation of the outer orbit take place.[1]

Therefore in our exposures we do not observe a Stark-effect of the first lines in the different series, and in the sharp series no influence is observed even in the higher members (e. g. $m = 10$).

On the contrary in fig. 6 it is seen, that the diffuse series from $m = 5$ exhibit a distinct Stark-effect, increasing by increasing term number. In fig. 6 are seen the three diffuse series: $2p_1$—md_j, $2p_2$—md_j and $2p_3$—md_j. These three series only differ in that the series electron jumps from the same orbits (md) to the three different $2p$-orbits and since these latter orbits are unaffected by the field, we can expect that the magnitude of the Stark-effect will be the same in the three series. In our measurements the shift of, for instance, the spectral line $2p_i$—mq in the field will only originate in the alteration of the term mq. Further it is seen in fig. 6 and better in fig. 7, that near each of the diffuse lines is a number of new lines appearing in the field.

[1] These considerations, which already are to be found in Bohr's paper on the effect of electric and magnetic field, Phil. Mag., 27, p. 506 (1914), (see also Phil. Mag., 30, p. 394 (1915)) have received general confirmation through the later extended experimental investigations by Stark and others on the effect of electric fields on series spectra.

In fig. 7 is shown on a larger scale the series $2p_1$—md as obtained through the double-image prism. The upper spectrum consists of the normal components, the lower of the parallel components (vibrations resp. normal and parallel to the electric force). In order to explain fig. 7, most of this figure is shown schematically in fig. 8.

Since the experimental arrangement did not allow us to separate the different d-combinations (d_1, d_2, d_3 and D) in the higher members of the series (when $m > 5$), the diffuse triplets appear only as one line, e. g. $2p_1$—$7d$. For smaller m the different components are separated, and in figs. 7 and 8 are seen the $2p_2$—$4q'$, $q' = d_2$, d_3 and D.[1]

None of these latter lines or the other $2p_2$-combinations and the four $2p_1$—ms sharp series lines are shifted by the field. Near $2p_2$—$4d_j$ two lines are seen in the field, that is the $2p_2$—$4p_1$ and $2p_2$—$4b$. As the correspondence principle prescribes, because they correspond to transitions, where k changes resp. 0 and 2, their emission is only possible in the electric field of the dark space. The line $2p_2$—$4p_1$ is only vibrating normal to the field, while for the $2p_2$—$4b$ the parallel component is the stronger. The rules determining the polarization will be discussed later in the paper.

It is of interest to follow in figs. 7 and 8 the character of the Stark-effect with increasing term number in the series $2p_1$—md. The first line of this series seen in the figures is the $2p_1$—$6d$. This line is only a little displaced, but grouping around the line are seen several new lines appearing in the field. To the right of $2p_1$—$6d$ is found the line $2p_1$—$6p_1$. It appears already in the upper end of the dark space, where the electric force is small, and by increasing field the line becomes more intense and shifts

[1] As far as our results go, only such p—d-combinations occur in the electric field as are already present in the undisturbed spectrum.

towards red. Still farther away is seen the line $2p_1$—$6p_2$, and it is to be noted that for the emission of this line a much more intense field is needed, and that the displacement of the line is smaller than that of $2p_1$—$6p_1$. That the observed lines really are these combination lines, is proved by a measurement of the wave lengths to which the lines converge in decreasing fields. From the series diagram the terms $6p_1$ and $6p_2$ are known, and the calculation of the wave length gives a full agreement between observations and calculations. No terms were known for the higher members in the series, but the lines were easily recognized from their behaviour in the field. Between the $2p_1$—$6d$ and $2p_1$—$6p_2$ are seen some non-affected lines, which do not belong to the *Hg I*, but probably to the *Hg II* spectrum.

On the more refrangible side of $2p_1$—$6d$ is found first the combination $2p_1$—$6b$, which is already excited in a weak field. By greater intensities of the field two more lines are seen, which we will denote by $2p_1$—$6e$ and $2p_1$—$6f$. While the lines $2p_1$—$6b$ and $2p_1$—$6e$ exhibit almost no shift in the field, the $2p_1$—$6f$ is shifted towards violet.

Near the next line $2p_1$—$7d$ are again seen on the long wave length side the lines $2p_1$—$7p_1$ and $2p_1$—$7p_2$ and on the short wave length side the lines $2p_1$—$7b$, $2p_1$—$7e$, $2p_1$—$7f$ and one more line called $2p_1$—$7g$. All the terms $7p_2$, $7p_1$, $7d$ and $7b$ show greater displacements than the corresponding 6-terms, but in their appearance in the field the same features are recognized in the 7- as in the 6-combinations.

In the combination $2p_1$—$8d$ is observed a line which is not affected by the field and therefore traverses the Stark-effect complex of $2p_1$—$8d$. From our plates by greater dispersion in condensed discharge it was seen that this

line was a spark line, situated 0.1 Å from the $2p_1$—$8d$, and accordingly screening this line by smaller dispersion. Nevertheless the greater part of the Stark-effect is recorded. First the two $2p_1$—$8p_2$, $2p_1$—$8p_1$, then $2p_1$—$8d$ and $2p_1$—$8b$ both strongly shifted towards red. The line $2p_1$—$8e$ is hidden, while the $2p_1$—$8f$ and $2p_1$—$8g$ and the new combination $2p_1$—$8h$ are seen. The $8f$- and $8g$-terms are shifted less to the violet than the 7-terms and in the higher members $m = 9$ and 10 this movement of all the components towards the red and the appearance of new combinations is continued. Thus we observe for $m = 9$ a new line $2p_1$—$9i$ and for $m = 10$, besides the $2p_1$—$10i$ also the $2p_1$—$10j$.

Little can be said about the convergence wave lengths of the new lines, since all the lines which come into the field are very weak near the end, and therefore difficult to follow, and besides that, most of the lines make their first appearance in a field which is strong enough to have already given the lines a considerable displacement. At the lower members ($m = 4$, 5, 6 and 7) some measurements of the undisturbed position have been made, the results of which have been included in the table I. The terms have been determined in such a way that the frequency of the uppermost end of a line was measured relative to a known line, usually a p—b or a p—p combination; in this way the distance between two terms in a vertical column in the table I was obtained. The new terms are therefore only measured relative to terms in the same column. These measurements are of course not very accurate, but are only given to show that the origin of the new lines is most probably transitions to the three $2p_i$-orbits from orbits, which in an undisturbed atom will be near the hydrogen orbits.

The detailed measurements of the plate, of which fig. 7 is only a part, are given in the table II. Besides the $2p_1$-series, just discussed, the $2p_2$- and $2p_3$-series have been measured.

The numbers in the table represent the difference between the mercury terms [1] and the corresponding hydrogen terms in the usual unit of frequency (cm^{-1}). This difference affords a very convenient way of measuring and describing the Stark-effect. In the second column are given these differences for the ordinary undisturbed mercury spectrum, as they can be calculated from table I. From the measurements of the displacement of the lines in an electric field we can calculate the values of the corresponding "displaced" terms. In the last six columns of table II are given the difference between these disturbed terms and the hydrogen terms as derived respectively from measurements of the $2p_1$-, $2p_2$- and $2p_3$-combinations in the maximum field, i. e. 20000 volt/cm. The number in parentheses is the approximate intensity at maximum field.

In fig. 9 the result of the measurement is shown schematically. As in the table, the terms are given by the difference from the corresponding hydrogen terms, which in the figure are arranged on the dotted line H—H. First is given the normal situation of the terms. Because in the undisturbed atom only the $2p_i$-terms combine with the md-term, the other terms (mp_i and mb) are dotted. Connected with the undisturbed terms by the inclined lines are the perturbed terms, as they are measured from both parallel and normal components of the combinations with

[1] When measuring our plates we have always confirmed the values of the spectral terms given by Paschen and Fowler a. o. Only from the two combinations $2p_i$—$5p_1$ ($i = 1$ and 2) do we find, that the term $5p_1$ must have the value 4570 instead of 4605, proposed by Paschen.

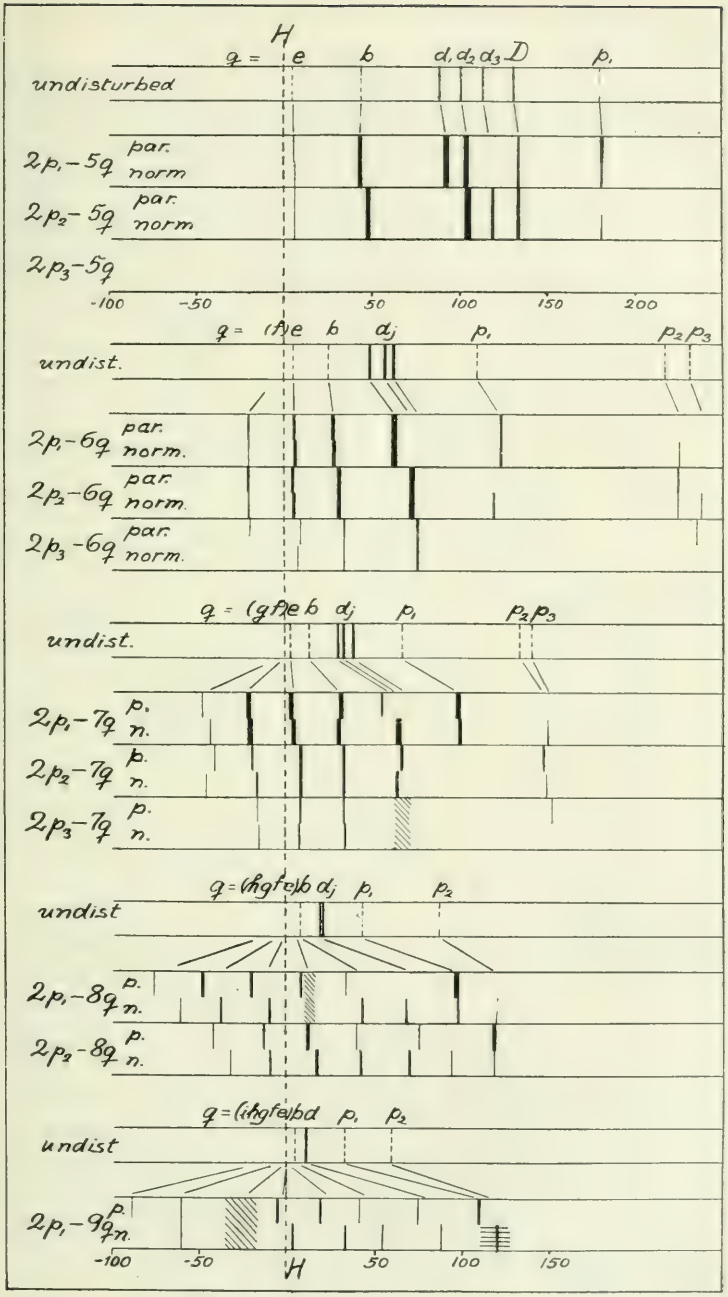
H
q = e b d, d₂ d₃ D p₁
undisturbed
2p₁−5q par. norm.
2p₂−5q par. norm.
2p₃−5q
-100 -50 50 100 150 200
q = (h)e b dⱼ p₁ p₂ p₃
undist.
2p₁−6q par. norm.
2p₂−6q par. norm.
2p₃−6q par. norm.
q = (gf)e b dⱼ p₁ p₂ p₃
undist.
2p₁−7q p. n.
2p₂−7q p. n.
2p₃−7q p. n.
q = (hgfe)b dⱼ p₁ p₂
undist
2p₁−8q p. n.
2p₂−8q p. n.
q = (ihgfe)bd p₁ p₂
undist
2p₁−9q p. n.
-100 -50 H 50 100 150

Fig. 9.

Table II.

Values of mercury terms less hydrogen terms.

mq	Undisturbed	In an electric field of about 20000 volt/cm.					
		$2p_1$-combinations		$2p_2$-combinations		$2p_3$-combinations	
		parallel	normal	parallel	normal	parallel	normal
$5p_3$	416	—	—	—	417 ($\frac{1}{2}$)	—	—
$5p_2$	379	—	—	379 (1)	379 (1)	—	—
$5p_1$	180	182 (4)	182 (3)	—	181 (2)	—	—
$5D$	131	134 (3)	132 (3)	134 (4)	134 (4)	—	—
$5d_3$	113	faint		119 (3)	119 (3)	113 (6)	113 (6)
$5d_2$	101	104 (4)	104 (4)	105 (6)	105 (6)	—	—
$5d_1$	89	92 (6)	92 (6)	—	—	—	—
$5b$	44	43 (4)	44 (4)	48 (4)	48 (4)	44 (3)	44 (3)
$5e$	5	5 (1)	6 (1)	6 (1)	6 (1)	—	—
Hydrogen term 4390							
$6p_3$	232	—	—	—	237 ($\frac{1}{2}$)	235 ($\frac{1}{2}$)	—
$6p_2$	217	—	225 (1)	224 (2)	224 ($\frac{1}{2}$)	—	—
$6p_1$	110	124 (3)	124 (3)	—	119 (2)	—	—
$6d_3$	62	—	—	73 (5)	73 (5)	76 (3)	76 (3)
$6d_2$	57	63 (6)	63 (6)			—	—
$6d_1$	48			—	—	—	—
$6b$	25	28 (4)	29 (4)	31 (4)	31 (4)	34 (2)	36 (2)
$6e$	5	5 (3)	6 (3)	4 (3)	5 (3)	9 (1)	7 (1)
$6f$	(—10?)	—21 ($1\frac{1}{2}$)	—20 (1)	—21 (2)	—20 (1)	—19 ($\frac{1}{2}$)	—
Hydrogen term 3048							
$7p_3$	141	—	—	—	—	152 ($\frac{1}{2}$)	—
$7p_2$	134	—	150 (1)	147 (2)	149 (1)	—	—
$7p_1$	67	99 (4)	100 (3)	—	93 (2)	—	—
$7d_3$	39	—	—	66 (3)	63 (3)	screened	
$7d_2$	33	55 ($1\frac{1}{2}$)	65 (4)				
$7d_1$	30			—	—	—	—
$7b$	14	32 (4)	30 (4)	33 (3)	33 (3)	33 (2)	34 (2)
$7e$	3	4 (4)	6 (4)	9 (3)	9 (3)	8 (2)	7 (2)
$7f$	(—3?)	—20 (3)	—19 (3)	—18 (2)	—16 (2)	—16 ($\frac{1}{2}$)	—15 ($\frac{1}{2}$)
$7g$	(—24?)	—47 (1)	—43 (1)	—40 ($\frac{1}{2}$)	—45 ($\frac{1}{2}$)	—	—
Hydrogen term 2240							

Table II. Continued.

mq	Undisturbed	In an electric field of about 20000 volt/cm.					
		$2p_1$-combinations		$2p_2$-combinations		$2p_3$-combinations	
		parallel	normal	parallel	normal	parallel	normal
$8p_3$		—	—	—	—	—	—
$8p_2$	87	—	120 (1)	119 (3)	119 (1)	—	—
$8p_1$	44	97 (4)	98 (2)	—	94 (1)	—	—
$8d_2$	21	—	68 (2)	76 ($\frac{1}{2}$)	70 (2)	—	—
$8d_1$	20						
$8b$	8	34 ($\frac{1}{2}$)	44 (2)	40 (1)	43 (2)	—	—
$8e$		7 (2)	screened	12 (3)	17 (3)	—	—
$8f$		−20 (3)	−9 (3)	−13 (2)	−9 (2)	—	—
$8g$		−47 (3)	−37 (2)	−42 (1)	−32 (1)	—	—
$8h$		−75 ($\frac{1}{2}$)	−60 (1)	too weak	—	—	—
Hydrogen term 1715							
$9p_2$	60	—	120 (2)	—	—	—	—
$9p_1$	33	110 (2)	very diffuse	—	—	—	—
$9d$	11	75 (1)	87 (1)	—	—	—	—
$9b$	5	42 ($\frac{1}{2}$)	55 (1)	—	—	—	—
$9e$		20 (2)	34 (2)	—	—	—	—
$9f$		−5 (2)	+4 (2)	—	—	—	—
$9g$		screened		—	—	—	—
$9h$		−60 ($\frac{1}{2}$)	−60 ($\frac{1}{2}$)	—	—	—	—
$9i$		−88 ($\frac{1}{2}$)	—	—	—	—	—
Hydrogen term 1355							

The error in the measurements is for the stronger lines about 4, for the weaker lines about 8 cm^{-1}.

Dispersion: 1 mm = 110—140 cm^{-1}.

the three $2p_i$-terms. The approximate intensity in the field is represented by the broadness of the lines. Several of the lines in 8- and 9-combinations are very weak and the errors in the measurement on that account comparatively large.

It is difficult to describe in detail all the changes occuring in the field, but attention may be drawn to some

interesting points, especially to the p—p combinations, which can be very completely discussed from our different plates. The result can best be summed up in the diagram in fig. 10.

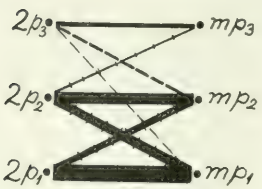

Fig. 10.

All the p—p lines are first excited in the electric field but by different intensities of the field.

Most of the observations are on combinations where $m = 5$, 6 and 7. In the figure is given approximately the relative facility with which the combinations appear. The broad lines mean emission even in weak fields, the thin lines only emission in the strongest fields. Furthermore the polarization of the lines is shown. The full lines mean partial parallel vibrations, the crossed lines a total normal and the polarization of the dotted lines has not been determined.

The details are:

$2p_1$—mp_1 appear already below 3000 volt/cm. By increasing term number the parallel component grows stronger than the normal component.

$2p_1$—mp_2 seen by 10000 volt/cm. Only normal components.

$2p_1$—mp_3 not observed.

$2p_2$—mp_1 easily excited from about 5000 volt/cm. Only normal component.

$2p_2$—mp_2 emitted by 5000 volt/cm. Particularly in the higher members more intense than $2p_2$—mp_1. Normal components stronger than parallel components.

$2p_2$—mp_3 faint and appear first in strong fields, when the force is 20000 volt/cm. Only normal components (a little doubtful).

$2p_3$—mp_1 very faint and only in the fields higher than 25000 volt/cm. Since these combinations are very difficult to excite we could not observe the polarisation.

$2p_3$—mp_2 faint, observed in strong fields by 15000 volt/cm.

$2p_3$—mp_3 faint, but are emitted more easily than $2p_3$—mp_2, by 10000 volt/cm. Only parallel components have been observed.

By the calculation of the minimum excitation voltages it has been supposed that the shift in the field is approximately proportional to the electric force. But these voltages are only to be taken as a rough estimation of the lower voltage, by which the lines are observed on our plates.

While mentioning the p—p lines we can add that of $2P$—mP combinations the two: $2P$—$4P$ and $2P$—$5P$ were observed, the first even in weak fields, while the latter appears only in stronger fields and is far more faint. No trace of series $2P$—mp_i was observed. Of the $2p_i$—mP series we have recorded the lines: $2p_1$—$3P$ and $2p_1$—$4P$; $2p_2$—$3P$; $2p_3$—$3P$ (doubtful) and $2p_3$—$4P$, while $2p_2$—$4P$ is hidden by the line 2536.7. All these lines were very faint and only emitted in the strongest fields (above 25000 volt/cm). As in the $2P$—mP series the intensity in the $2p_i$—mP series decreases rapidly with increasing term number. Through the presence of these combinations the values of some of the very abnormal mP terms have been confirmed.

The $2p_i$—md lines, as well as the $2p$—p and $2p$—b lines, exhibit an increasing displacement with increasing term number. The displacement is for $5d$ about 5 cm^{-1}, for $6d$ about 15 cm^{-1}, $7d$ about 30 cm^{-1}, $8d$ about 50 cm^{-1}, $9d$ about 70 cm^{-1} with a field of about 20000 volt/cm.

By comparing the *mp* terms with the *md*'s and the *mb*'s it is clearly seen that the greater the distance of a spectral term is from a hydrogen term, the smaller is the influence of the external field. Thus mp_3 and mp_2 are less perturbed than mp_1 and these again less than the *md* terms, etc.

As mentioned in the introduction it is claimed by the correspondence principle that in the electric field lines are emitted corresponding to transitions in which k may change by other values than one. We know that for *mp*, *md* and *mb* k is respectively 2, 3 and 4. It is therefore very tempting to assign to the new observed terms *me*, *mf*, *mg*, *mh*, *mi*, and *mj* the values 5, 6, 7, 8, 9, and 10 for k resp. According to its definition, the rotational quantum number k is smaller than or equal to the principal quantum number. It is now interesting to see, that, if for the principal quantum number we take m, the rule $k \leq m$ really determines the number of the new lines observed in the Stark-effect; for instance, the *me*-terms ($k = 5$) are first observed, when $m = 5$, and when $m = 9$ we observe all the terms up to $9i$, where $k = 9$. Even the line $2p_1$—$10j$ corresponding to a jump of k from 10 to 2 was observed. How far this fixation of the values of k is allowed from a theorical point of view is perhaps somewhat doubtful, but it seems, as if at least the greater part of the intensity of the lines originates in transitions from the terms (i. e. orbits), with which we have related the lines.

With increasing term numbers we recognize an evident evolution towards a Stark-effect of the hydrogen type, symmetrically arranged about the normal hydrogen terms. In addition, it is remarkable that while in the terms up to $m = 7$ there is a coincidence within the experimental error in the displacements observed both in parallel and normal

components of the three $2p_i$-combinations, yet for $m = 8$ and 9 there seems to be no such agreement. Probably this points to the presence of a fine structure of the Stark-effect unresolved in our experiments.

The polarization of the lines, with the exception of the $2p_i—mp_j$, is not very marked in the terms of m smaller than 7. But when m is greater than 7 it is seen in figs. 7 and 8 that in the $2p_1—mq$ series for the lines which are displaced to the red, the normal component is the stronger, while for lines which exhibit a shift to the more refrangible side the parallel component is the stronger. This polarization is more pronounced the higher the terms are in the series. The series of $2p_2$-combinations are apparently not polarized, while the $2p_3$-combinations are only observed to $m = 7$, where no polarization is observed. That this series is not recorded farther is accounted for by the rapid decrease in the sensibility of the ordinary photographic plate in this region (λ about 2250 Å).

Further, the $2P$-combinations have also been investigated. Our material is not so large as for the $2p_i$-lines. The features of the Stark-effect were nearly the same, but a number of new lines appeared around the $2P—mD$ lines in the field. Of these the $2P—mP$ have been discussed. The others were only of small interest, and the corresponding terms mB, mE and mF were of nearly the same value as the terms in the $2p_i$-combinations.

The line $2P—5D$ was very little shifted in the field. At $2P—6D$ there was a displacement to the red and a distinct resolution of the line into two components in the field, in contrast to the $2p_i—6d_j$ and $2p_i—6D$ lines, where only a shift was observed. Both of the two components are diffuse, and their mean displacements are, with 35000 volt cm,

32 cm^{-1} and 19 cm^{-1} towards the red. The deviations of the $2p_i$—$6d_j$ lines are, with the same field, 22 ± 4 cm^{-1}. An attempt was made to investigate the polarization of the two components, but on account of their small intensity it was very difficult to obtain a reliable result. It seems as if the most shifted component vibrates normal and the other parallel to the field. Also for the next member of the series $2P$—$7D$ there was some evidence of a similar splitting up in the field, but this was too faint for any measurements. In the investigations of this question we have enjoyed the help of the late Dr. C. D. Udden.

In the very faint series $2p_i$—mD ($i = 1$ and 2) no analogous splitting-up in the field is observed. It should be mentioned, however, that while the line $2p_1$—$6D$ is not polarized in the field, the line $2p_2$—$6D$ seems with increasing field to show an increasing polarization, and above 10000 volt/cm it seems only to vibrate normal to the field.

In the table III are summarized all the lines belonging to the *HgI* spectrum, which have been observed in the field besides the ordinary lines corresponding to a change in k of ± 1.

Table III.

m	$2p_3$-combinations with	$2p_2$-combinations with	$2p_1$-combinations with	$2P$-comb. with
3	P	$P\ p_1$	$P\ p_1$	—
4	$P\ b$	$p_1\ b$	$P\ p_1\ b$	PB
5	$p_3\ p_2\ p_1\ b\ e$	$p_3\ p_2\ p_1\ b\ e$	$p_2\ p_1\ b\ e$	PB
6	$p_3\ p_2\ b\ e\ f$	$p_3\ p_2\ p_1\ b\ e\ f$	$p_2\ p_1\ b\ e\ f$	$BE(FP)$*
7	$(p_3\ p_2)$* $b\ e\ f\ g$	$p_2\ p_1\ b\ e\ f\ g$	$p_2\ p_1\ b\ e\ f\ g$	$BEF\ [=f]$
8	$(p_3\ p_2)$* $b\ e$	$p_2\ p_1\ b\ e\ f\ g\ h$	$p_2\ p_1\ b\ e\ f\ g\ h$	
9		$(p_2\ p_1)$* $b\ f\ g\ h\ i$	$p_2\ p_1\ b\ e\ f\ h\ i$	
10			$(p_2\ p_1)$* $b\ e\ f\ g\ i\ j$	

* Not separated.

The original intention with the experiments in the electric field was to solve the question of the occurence of the line $1S—2p_1$ in electric fields. Only in one of our plates (fig. 6), the most intense, did we get the line $1S—2p_1$, very faintly in the field (too faint to be seen in the figure). As was the case in the experiments with the longitudinal magnetic field, we had to expose the plate so much that the series $2p_2—ms$ was well developed. This series is, as our plate shows, especially strong just over the dark space in the negative glow, while it is faint in the dark space, where the electric field is. By careful examination of our plate we find that the line $2p_2—12s$ is a little stronger than would correspond to the other lines in the series, and we can follow from this line a very faint line down through the dark space, where none of the $2p_2—11s$ or $2p_2—13s$ are seen. We conclude therefore, that in the full length of the dark space and even in the negative glow the line $1S—2p_1$ is present, but very weak. The remarkable fact is, that the line is seen in such a length. If the line were ordinarily excited by the influence of the electric field, we would expect an appearance of the line like one of the many observed electrically affected lines, which are clearly seen coming in the field. The only natural explanation for the precence of the line in the Stark-effect experiment is therefore, that in the Lo Surdo tube we cannot avoid a condensed action, and that it is this action, which so easily excites the $1S—2p_1$, that brings this line faintly to emission. Our result is then, that homogeneous electric fields cannot produce the line $1S—2p_1$ (and $1S—2p_3$).

SUMMARY.

1) This paper brings a detailed investigation of the effect of electric fields (the Stark-effect) on the mercury spectrum up to a field intensity of 35000 volt/cm. The experiments were carried out by the Lo Surdo method, using a mercury surface as the cathode. The effect of the electric field consists mainly in the production of new combination lines. For these their relative intensities, state of polarization and displacements in the field were examined. The general feature of the observed effects is in close agreement with the quantum theory of spectra; a more detailed theoretical discussion of our results will shortly be published by Dr. W. Pauli.

2) Further we have endeavoured to find out to what extent transitions from the two meta-stable states, $2p_1$ and $2p_3$, to the normal state of the mercury atom become possible by the presence of external fields, giving rise to an emission of the corresponding lines $1S—2p_1$ (2270 Å) and $1S—2p_3$ (2656 Å). As in luminous mercury vapour we may expect a considerable accumulation of atoms in these meta-stable states, the appearance of the mentioned lines should afford a delicate means of examining the effect of external fields. Our results show, however, no detectable effect of homogeneous magnetic or electric fields. On the other hand the line $1S—2p_1$ is excited in considerable intensity by condensed discharge, whereas the line $1S—2p_3$ has not been detected at all. The action of the condensed discharge is supposed to consist of forces from neighbouring atoms and ions, constituting a rapidly changing and very inhomogeneous field.

In conclusion the authors wish to express their best thanks and indebtedness to Professor N. Bohr for his kind interest and valuable advice during the work.

Copenhagen, Universitetets Institut for teoretisk Fysik, October 1922.

Færdig fra Trykkeriet den 3. August 1923.

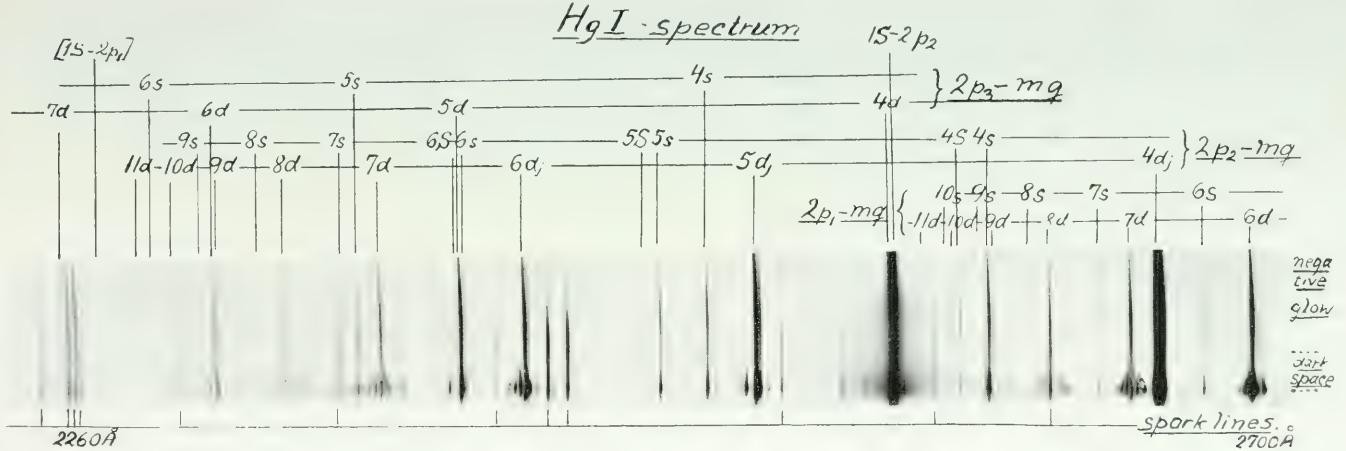

Fig. 6.

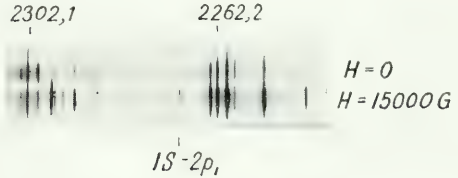

Fig. 2.

D. K. D. Vid. Selsk. Math.-fysiske Medd. V, 3
[H. M. Hansen, T. Takamine, Sven Werner]

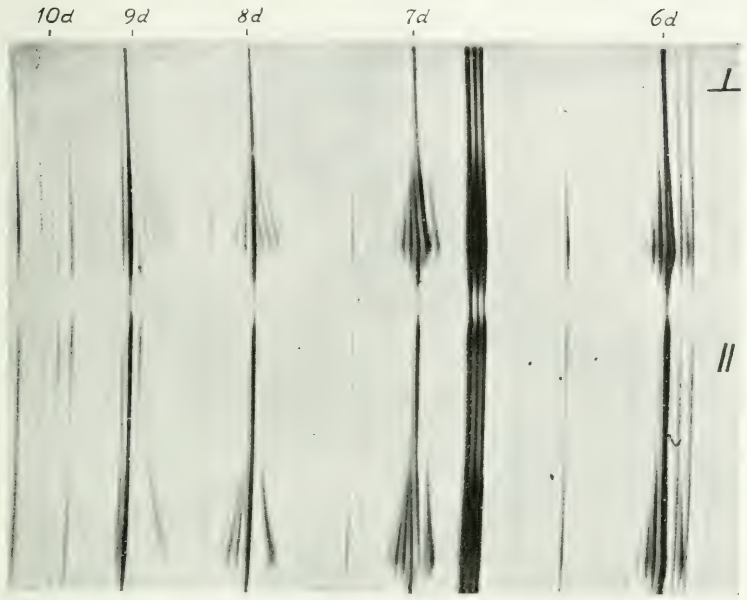
10d
9d
8d
7d
6d
I
II

Fig. 7.

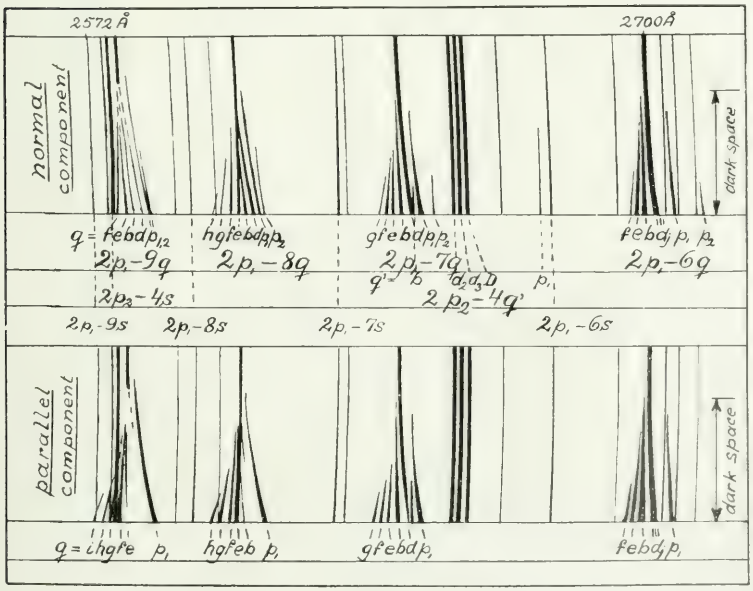
2572 Å
2700 Å
normal component
dark space
q = febdp1,2
2p1-9q
hgfebdp1p2
2p1-8q
gfebdp1p2
2p1-7q
q' = b
d2d3D
p1
2p2-4q'
febdjp1p2
2p1-6q
2p2-4s
2p1-9s
2p1-8s
2p1-7s
2p1-6s
parallel component
dark space
q = ihgfe p1
hgfeb p1
gfebdp1
febdjp1

Fig. 8.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **V**, 4.

RECHERCHES

SUR CERTAINES

ÉQUATIONS DE LAGRANGE

DE FORMES SPÉCIALES

PAR

NIELS NIELSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1923

AVANT-PROPOS

Dans un Mémoire qui paraîtra prochainement, je l'espère, j'ai développé les fondements d'une théorie générale des équations de LAGRANGE, fondements qui sont indispensables pour le calcul d'une table des solutions des équations susdites.

Dans le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie Royale, j'étudie certaines classes d'équations de LAGRANGE de formes spéciales, mais néanmoins d'un caractère assez général pour donner des éclaircissements essentiels sur la nature des équations susdites, éclaircissements qui sont très désirables, parce qu'il n'existe que des traces, très rares et souvent trompeuses, d'une telle théorie.

La première Partie du présent Mémoire est consacrée à l'étude d'une classe de nombres fort intéressants, savoir les sommes de deux carrés premiers entre eux:

$$a = p^2 + q^2, \tag{1}$$

pour lesquels l'équation de FERMAT

$$x^2 - ay^2 = -1 \tag{2}$$

n'est pas résoluble. Ces nombres semblent être restés inaperçus jusqu'ici.

On dit généralement que, malgré les recherches de divers géomètres, on ne connaît pas encore complètement la

condition nécessaire et suffisante que doit satisfaire la base a, pour que l'équation susdite soit résoluble.

Or, les résultats que j'ai obtenus semblent indiquer, par leur grande diversité, que l'établissement de cette condition suffisante et nécessaire est un problème extrêmement difficile, évidemment irrésoluble, à moins que l'on ne trouve des méthodes beaucoup plus profondes que celles appliquées jusqu'ici.

Remarquons, en passant, que, parmi les 243 bases de première espèce inférieures à 1500, on trouve 44 couples de la forme

$$4a+1, \quad 4a+5, \tag{3}$$

et le produit de ces deux nombres est toujours une base de seconde espèce.

Remarquons encore que les nombres de la forme (1) sont les seules bases de seconde espèce, pour lesquelles des équations de la forme

$$u^2 - av^2 = \omega, \quad u^2 - av^2 = -\omega \tag{4}$$

sont simultanément résolubles, et qu'il existe, pour chacune de ces bases, une infinité de nombres ω qui permettent de résoudre les deux équations susdites.

Dans les Tables jointes au présent Mémoire, je donne des éclaircissement numériques concernant les 41 bases de seconde espèce inférieures à 1500, savoir leur décomposition en facteurs premiers, en somme de deux carrés et, d'après les Tables de Degen[1] et de Cayley[2], leurs développements en fractions continues.

Et, chose curieuse, pour 17 de ces 41 nombres, on

[1] Canon Pellianus, Copenhague 1817.

[2] Report of the British Association for the advancement of Science 1893.

trouve immédiatement, à l'aide des nombres p et q qui figurent dans la décomposition (1), une solution de l'équation indéterminée

$$u^2 - a v^2 = a - 1, \tag{5}$$

pour la base 221 même deux solutions de l'équation

$$u^2 - 221\, v^2 = 220.$$

De plus, il est facile de démontrer qu'il existe une infinité de bases de seconde espèce de la forme (1) qui possèdent la même propriété.

La seconde Partie de mon Mémoire est consacrée à l'étude des équations

$$u^2 - (\alpha^2 + 1)\, v^2 = \pm \omega, \tag{6}$$

où α est un positif entier quelconque. J'ai réussi à déterminer, quel que soit α, la plus petite valeur de ω, pour laquelle l'équation susdite soit résoluble, et à démontrer que l'équation (6) est, pour cette valeur minimum de ω, toujours du genre 2.

Soit, dans (6), α un nombre pair, cette valeur minimum est toujours déterminée par

$$\omega = 2\alpha,$$

de sorte que l'équation

$$u^2 - (\alpha^2 + 1)\, v^2 = \pm 2\alpha \tag{7}$$

est toujours du genre 2, tandis que cette autre équation

$$u^2 - (\alpha^2 + 1)\, v^2 = \pm \alpha^2, \tag{8}$$

obtenue de (7) par l'opération itérative est, pour une infinité des valeurs de α, au moins du genre 4.

Dans la troisième Partie, je donne des généralisations des formules de Cayley et j'expose les propriétés curieuses des nombres A_{2r+1}, tirés de l'équation de Fermat

(9) $$A_m^2 - aB_m^2 = (-1)^{m\varepsilon},$$

où l'équation de Lagrange

(10) $$u^2 - av^2 = (-1)^{\varepsilon} 4$$

est supposée résoluble.

Quant à la quatrième Partie, elle contient des recherches sur diverses équations de Lagrange de formes spéciales, et je donne par exemple la solution complète de l'équation

(11) $$(\alpha + 1)\, u^2 - (\alpha - 1)\, v^2 = 2,$$

où α est un nombre pair quelconque.

Copenhague, le 9 février 1923.

Niels Nielsen.

PREMIÈRE PARTIE

Sur les sommes de deux carrés.

I. Bases de seconde espèce.

Lagrange, dans sa résolution ingénieuse de l'équation de Fermat, a proposé à la postérité un problème très difficile, problème qui est évidemment encore très éloigné de sa résolution complète, savoir:

Trouver la condition nécessaire et suffisante qui doit être remplie par la base a, pour que l'équation indéterminée

$$x^2 - ay^2 = -1 \tag{1}$$

soit résoluble en positifs entiers.

En effet, abstraction faite de certaines règles, plus ou moins spéciales[1], on sait que l'équation (1) est toujours résoluble pour

$$a = (4k+1)^{2z+1}, \quad a = \alpha^2 + 1, \quad a = (2\alpha+1)^2 + 4, \tag{2}$$

où $4k+1$ est un nombre premier, tandis que α est un positif entier.

De plus, on sait que, dans l'équation (1) supposée résoluble, a doit être ou impair ou de la forme $4k+2$, et

[1] Voir par exemple G. Lejeune Dirichlet, dans les Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1834, p. 649—664; Werke t. I, p. 219—236; J. Sommer: Vorlesungen über Zahlentheorie, p. 167; Leipsic 1907.

que tous les facteurs premiers impairs de a sont nécessairement de la forme $4k+1$; c'est-à-dire que a est toujours, dans l'équation résoluble (1), la somme de deux carrés premiers entre eux.

Or, il est facile de voir que cette condition nécessaire n'est pas suffisante aussi, ce qui est mis en pleine lumière par la proposition:

I. L'équation indéterminée

$$(2) \qquad (x+1)^2+(x-1)^2 = y^2-2$$

admet une infinité de solutions en positifs entiers.

Remarquons que l'équation proposée se présente sous la forme

$$2x^2 = y^2-4,$$

il est évident que x et y sont tous deux pairs. Posons donc

$$(3) \qquad x = 2u, \quad y = 2v,$$

il résulte

$$(4) \qquad v^2-2u^2 = 1,$$

ce qui donnera

$$v = A_{2n}, \quad u = B_{2n},$$

où nous avons posé généralement, quel que soit l'indice m,

$$(5) \qquad A_m^2-2B_m^2 = (-1)^m,$$

de sorte que nous aurons finalement, comme solution générale de l'équation (2),

$$(6) \qquad x = 2B_{2n}, \quad y = 2A_{2n}.$$

Or, la proposition I donnera comme corollaire cette autre:

II. La somme de deux carrés, premiers entre eux,

$$(7) \qquad (2B_{2n}+1)^2+(2B_{2n}-1)^2$$

est toujours, quel que soit l'indice n, une base de seconde espèce.

On voit que les premiers des nombres de la forme (7) deviennent

$$34 = 5^2+3^2 = 6^2-2, \quad 1154 = 25^2+23^2 = 34^2-2$$
$$39202 = 141^2+139^2 = 198^2-2, \quad 131714 = 817^2+815^2 = 1154^2-2.$$

Étudions maintenant, à un autre point de vue, les bases que nous venons de mentionner.

A cet effet, supposons tout d'abord que a soit une base de première espèce, savoir que l'équation (1) soit résoluble, Legendre a remarqué que les deux équations de Lagrange

$$(8) \qquad u^2 - av^2 = \omega, \quad u^2 - av^2 = -\omega$$

sont nécessairement en même temps résolubles ou non.

Or, cette condition suffisante pour la résolubilité simultanée des deux équations (8) n'est pas nécessaire, car il est facile de démontrer le théorème général:

III. La condition suffisante et nécessaire pour la résolubilité simultanée des équations de la forme (8) est que la base a soit la somme de deux carrés premiers entre eux.

Pour mettre en pleine lumière cette propriété remarquable des sommes de deux carrés, nous avons à démontrer les deux lemmes suivants:

IV. Supposons résolubles les deux équations (8), la base a est nécessairement la somme de deux carrés premiers entre eux.

En effet, désignons par (u, v) respectivement (u_1, v_1) une solution quelconque de chacune des équations susdites, supposées résolubles, il résulte

$$(9) \qquad (uu_1 \pm avv_1)^2 - a(uv_1 \pm u_1v)^2 = -\omega^2.$$

Soit ensuite f le plus grand commun diviseur des deux nombres

$$uu_1 + (-1)^{\varepsilon} a v v_1, \quad u v_1 + (-1)^{\varepsilon} u_1 v,$$

f est aussi le plus grand commun diviseur et de u et ω et de v et ω. Supprimons donc, dans l'équation correspondante (8), le facteur f^2, commun aux deux membres de cette équation, il résulte une égalité de la forme

$$\alpha^2 - a\beta^2 = -\omega_1^2,$$

où α et ω_1 sont premiers entre eux, ce qui donnera

$$a\beta^2 = \alpha^2 + \omega_1^2,$$

donc a est nécessairement la somme de deux carrés premiers entre eux.

V. Soit la base a une somme de deux carrés premiers entre eux, il existe une infinité de valeurs de ω, telles que les équations (8) sont toutes deux résolubles.

Quant à cette proposition, M. G. Rasch m'a communiqué la démonstration suivante:

Posons

$$a = p^2 + q^2,$$

où p et q sont premiers entre eux, nous aurons, quels que soient les positifs entiers α et β,

$$a(\alpha^2 + \beta^2) = (p\alpha \pm q\beta)^2 + (p\beta \mp q\alpha)^2, \tag{10}$$

et il est possible de déterminer α et β tels que les deux nombres

$$p\alpha \pm q\beta, \quad p\beta \mp q\alpha$$

soient premiers entre eux, ce qui a par exemple lieu pour

$$p\beta - q\alpha = \pm 1$$

et cette équation indéterminée est toujours résoluble, ce qui donnera, en vertu de (10),

(11) $$a(\alpha^2+\beta^2) = \gamma^2+1,$$

et le nombre

$$\gamma = p\alpha + q\beta$$

est certainement premier avec a, α, β.

Posons ensuite

(12) $$\omega = a\beta^2 - 1,$$

il est évident que les équations

(13) $$u^2 - av^2 = \omega, \quad u^2 - av^2 = -\omega$$

sont toutes deux résolubles, ayant respectivement les solutions (γ, α) et $(1, \beta)$.

II. Sur la nature des sommes de deux carrés.

On voit que les propositions I et II de l'article précédent donnent immédiatement cette autre:

I. Il existe une infinité de bases de seconde espèce qui sont la somme de deux carrés, premiers entre eux.

Or, il est facile de donner plusieurs autres classes de telles bases, comme le montrent clairement les propositions suivantes:

II. L'équation indéterminée

(1) $$x^2 + (2x+1)^2 = y^2 + 2$$

admet une infinité de solutions en positifs entiers.

En effet, on aura, en vertu de (1),

$$5x^2 + 4x = y^2 + 1,$$

ou, ce qui est la même chose,

(2) $$x = \frac{-2 + \sqrt{5y^2+9}}{5},$$

de sorte qu'il s'agit tout d'abord de résoudre l'équation de

$$z^2 - 5y^2 = 9, \tag{3}$$

Or, 5 n'étant pas résidu quadratique de 3, cette équation n'est résoluble, à moins que z et y ne soient tous deux multiples de 3. Soit donc

$$z = 3u, \quad y = 3v,$$

il résulte, en vertu de (3),

$$u^2 - 5v^2 = 1, \tag{4}$$

ce qui donnera

$$u = A_{2n}, \quad v = B_{2n}, \tag{5}$$

où l'on aura, quel que soit l'indice m,

$$A_m^2 - 5B_m^2 = (-1)^m. \tag{6}$$

Cela posé, reste encore à déterminer l'indice n qui figure dans les formules (5), tel que x devienne un positif entier, ce qui exige, en vertu de (2), que

$$x = \frac{3A_{2n} - 2}{5}$$

soit un nombre entier.

Or, les premières solutions de l'équation (6) étant

$$(2, 1), \quad (9, 4), \quad (38, 17), \ldots,$$

on aura

$$A_2 = 9,$$

de sorte qu'il résulte, en vertu des formules récursives de Lagrange,

$$A_{2n} \equiv 9^n \equiv (-1)^n \pmod 5,$$

ce qui donnera

$$3A_{2n} - 2 \equiv (-1)^n 3 - 2 \pmod 5;$$

c'est-à-dire que l'on aura généralement

$$3A_{4n-2} - 2 \equiv 0 \pmod 5,$$

quel que soit le positif entier n; donc la solution générale de l'équation proposée se présente sous la forme

$$x_n = \frac{3A_{4n-2} - 2}{5}, \quad y_n = 3B_{4n-2}. \tag{7}$$

Cette proposition démontrée, nous avons à revenir aux bases générales de seconde espèce qui sont la somme de deux carrés premiers entre eux, savoir

$$a = \alpha^2 + \beta^2;$$

nous savons dès à présent que a doit toujours contenir au moins deux facteurs premiers inégaux. Quant aux bases de première espèce, nous avons tout d'abord à démontrer le lemme fondamental:

III. Soient les trois nombres a, b, c, pris deux à deux, premiers entre eux, l'équation indéterminée

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = z^2 + c^2 \tag{8}$$

admet une infinité de solutions en positifs entiers de x, y, z.

On voit, en effet, que l'équation proposée n'est autre chose que celle-ci

$$(ax \pm by)^2 + (ay \mp bx)^2 = z^2 + c^2,$$

de sorte que l'on aura à déterminer x et y, tels que

$$ax \pm by = \pm c, \tag{9}$$

ce qui donnera

$$ay \mp bx = \pm z. \tag{10}$$

Soit maintenant α et β une solution quelconque de l'équation indéterminée (9), toujours résoluble, les valeurs générales de x et y se présentent sous la forme

$$x = |\alpha + bk|, \quad y = |\beta + ak|, \tag{11}$$

où k est un nombre entier quelconque; donc on aura, en vertu de (10),

$$z = |a\beta + b\alpha + k(a^2 + b^2)|. \tag{12}$$

Cela posé, il est évident que la formule (8) donnera immédiatement plusieurs propositions intéressantes concernant les sommes de deux carrés premiers entre eux.

En effet, soit, en premier lieu, $c = 1$, nous aurons:

IV. Il existe une infinité de bases de première espèce qui contiennent un nombre quelconque de facteurs premiers inégaux.

V. Il existe une infinité des bases de première espèce qui contiennent comme facteurs un nombre quelconque de bases de seconde espèce.

Soit ensuite, dans la formule (8),

$$a = b = 1,$$

on aura, quel que soit le positif entier α,

$$2(\alpha^2 + (\alpha + 1)^2) = (2\alpha + 1)^2 + 1,$$

ce qui donnera la proposition, curieuse en comparaison avec la proposition II de l'article précédent:

VI. Le double de la somme de deux carrés consécutifs est toujours une base de première espèce.

Étudions maintenant le nombre

$$\alpha(\alpha + 4) = (\alpha + 2)^2 - 4 \tag{13}$$

qui est toujours une base de seconde espèce; c'est pourquoi qu'il est très curieux, ce me semble, qu'il existe 44 couples de nombres consécutifs de la forme $4k + 1$, inférieurs à 1500, qui sont tous deux des bases de première espèce, tandis que le produit de ces deux nombres consécutifs est toujours une base de seconde espèce. Et il existe seulement 243 bases de première espèce inférieures à 1500.

Mais y a-t-il une infinité de tels couples de bases consécutives de première espèce?

Ce problème est peut-être aussi difficile que le problème concernant les couples de nombres impairs consécutifs qui sont tous deux des nombres premiers.

Quant aux nombres (13), il est facile de démontrer la proposition curieuse:

VII. Il existe une infinité de nombres de la forme (13) dont le double est une base de première espèce.

A cet effet, nous avons à résoudre en positifs entiers l'équation indéterminée

$$2x(x+4) = y^2+1, \tag{14}$$

ce qui donnera

$$x = -2 + \sqrt{\frac{y^2+9}{2}},$$

de sorte qu'il s'agit de résoudre en positifs entiers cette autre équation

$$y^2 - 2z^2 = -9. \tag{15}$$

Or, 2 n'étant pas résidu quadratique de 3, l'équation (15) n'est résoluble à moins que y et z ne soient tous deux multiples de 3.

Posons donc

$$y = 3u, \quad z = 3v,$$

il résulte, en vertu de (15),

$$u^2 - 2v^2 = -1, \tag{16}$$

de sorte que nous aurons

$$u = A_{2n-1}, \quad v = B_{2n-1},$$

où nous avons posé, quel que soit l'indice m,

$$A_m^2 - 2B_m^2 = (-1)^m$$

donc la solution générale de l'équation (14) se présente sous la forme

$$x_n = 3B_{2n+1} - 2, \quad y_n = 3A_{2n+1}. \tag{17}$$

III. Des équations du genre 4.

Revenons maintenant aux équations générales dont la base, étant la somme de deux carrés premiers entre eux, est de seconde espèce, nous avons tout d'abord à démontrer le lemme fondamental:

I. Supposons résoluble l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = -p^{2\varrho}, \tag{1}$$

où p est un nombre premier impair, puis désignons par ω un positif entier qui n'est pas multiple de p, les deux équations

$$u^2 - av^2 = p^{\varrho}\omega, \quad u^2 - av^2 = -p^{\varrho}\omega \tag{2}$$

sont en même temps résolubles ou non.

En effet, supposons résoluble l'équation

$$u_1^2 - av_1^2 = (-1)^{\delta} p^{\varrho}\omega, \tag{3}$$

nous aurons, en multipliant (1) et (3),

$$(uu_1 \pm avv_1)^2 - a(u_1 v \pm u_1 v)^2 = (-1)^{\delta+1} p^{3\varrho}\omega. \tag{4}$$

De plus, il résulte, en vertu de (1) et (3),

$$u^2 u_1^2 - a^2 v^2 v_1^2 = p^{\varrho}\left((-1)^{\delta} av^2\omega - p^{\varrho} av_1^2 - (-1)^{\delta} p^{2\varrho}\omega\right)$$
$$a(u^2 v_1^2 - u_1^2 v^2) = p^{\varrho}\left((-1)^{\delta} u^2\omega + p^{\varrho} av_1^2 + (-1)^{\delta} p^{2\varrho}\omega\right),$$

ce qui donnera les congruences

$$\begin{cases} u^2 u_1^2 - a^2 v^2 v_1^2 \equiv 0 \pmod{p^{\varrho}} \\ u^2 v_1^2 - u_1^2 v^2 \equiv 0 \pmod{p^{\varrho}}, \end{cases} \tag{5}$$

et il est évident qu'aucun des nombres qui figurent aux premiers membres de ces congruences ne peut être divi-

sible par une puissance du nombre premier p, plus élevée que p^{ϱ}.

Remarquons ensuite que les nombres

$$uu_1 + avv_1, \quad uu_1 - avv_1$$

ne sont jamais tous deux multiples de p, parce que leur somme $2uu_1$ est premier avec p, il existe un exposant ε, tel que l'on aura, en vertu de (3) et (5),

$$(6) \quad uu_1 + (-1)^{\varepsilon} avv_1 = p^{\varrho}\alpha, \quad uv_1 + (-1)^{\varepsilon} uv_1 = p^{\varrho}\beta,$$

où ni α ni β ne peuvent être divisibles par p, de sorte qu'il ne s'agit que de démontrer que α et β sont premiers entre eux.

A cet effet, supposons que λ soit un nombre premier qui divise à la fois α et β, nous aurons, en vertu de (1) et (6),

$$p^{\varrho}u_1 = av\beta - u\alpha, \quad p^{\varrho}v_1 = (-1)^{\varepsilon}(v\alpha - u\beta);$$

c'est-à-dire que λ, étant nécessairement différent de p, doit être facteur commun de u_1 et v_1, ce qui est impossible, parce que l'équation (3) est supposée résoluble.

Quant au nombre premier 2, on aura, au lieu de I, la proposition analogue:

II. Supposons résoluble l'équation

$$(7) \qquad u^2 - av^2 = -2^{2\sigma-2},$$

où σ est un positif entier quelconque, puis désignons par ω un nombre impair, les deux équations

$$(8) \qquad u^2 - av^2 = 2^{\sigma}\omega, \quad u^2 - av^2 = -2^{\sigma}\omega$$

sont en même temps résolubles ou non.

Remarquons tout d'abord que les valeurs spéciales

$$\sigma = 1, \quad \sigma = 2$$

ne présentent aucun intérêt, parce que, dans ce cas, a est nécessairement une base de première espèce.

Soit donc $\sigma \geq 3$, et soit l'équation

$$u_1^2 - a v_1^2 = (-1)^{\vartheta} 2^{\sigma} \omega \tag{9}$$

résoluble, on aura en vertu de (7),

$$(uu_1 \pm a v v_1)^2 - a (u v_1 \pm u_1 v)^2 = (-1)^{\vartheta+1} 2^{3\sigma-2} \omega. \tag{10}$$

Or, u et v, u_1 et v_1 étant des nombres impairs, il existe un exposant ε, tel que

$$|uu_1 - (-1)^{\varepsilon} a v v_1| = 4k+2, \quad |u v_1 - (-1)^{\varepsilon} u_1 v| = 4l+2,$$

de sorte que les congruences

$$\begin{aligned} u^2 u_1^2 - a^2 v^2 v_1^2 &\equiv 0 \pmod{2^{\sigma}} \\ u^2 v_1^2 - u_1^2 v^2 &\equiv 0 \pmod{2^{\sigma}}, \end{aligned}$$

tirées directement des équations (7) et (9), donnent

$$|uu_1 + (-1)^{\varepsilon} a v v_1| = 2^{\sigma-1} \alpha, \quad |u v_1 + (-1)^{\varepsilon} u_1 v| = 2^{\sigma-1} \beta, \tag{11}$$

où α et β sont des nombres entiers.

Cela posé, il résulte, en vertu de (10),

$$\alpha^2 - a\beta^2 = (-1)^{\vartheta+1} 2^{\sigma} \omega, \tag{12}$$

et l'on démontrera, comme dans le lemme I, que α et β ne peuvent jamais avoir un facteur commun qui n'est pas une puissance de 2, de sorte qu'il s'agit de démontrer que α et β sont tous deux des nombres impairs.

A cet effet, remarquons tout d'abord que les équations (11) donnent, résolues par rapport à u et v,

$$2\omega u = |u_1 \alpha \pm a v_1 \beta|, \quad 2\omega v = |v_1 \alpha \pm u_1 \beta|, \tag{13}$$

puis posons

$$\alpha = 2^{\mu} \alpha_1,$$

où α_1 est impair, il résulte, en vertu de (12),

$$\beta = 2^{\mu} \beta_1,$$

où β_1 est aussi un nombre impair, de sorte que les équations (13) donnent

$$2\omega u = 2^{\mu}|u_1\alpha_1 \pm a v_1\beta_1|, \quad 2\omega v = 2^{\mu}|u_1\beta_1 \pm v_1\alpha_1|.$$

Or, remarquons que les facteurs de 2^{μ} qui figurent aux seconds membres de ces deux équations sont tous deux des nombres pairs, nous aurons nécessairement $\mu = 0$, parce que ω et u, v sont impairs.

Posons maintenant, dans les développements précédents

$$\omega = q^{\sigma},$$

où q est un nombre premier impair, nous aurons, en vertu de I et II, ces deux propositions plus spéciales:

III. Supposons résolubles les deux équations

$$(14) \qquad u^2 - a v^2 = -p^{2\varrho}, \quad u^2 - a v^2 = (-1)^{\vartheta} p^{\varrho} q^{\sigma},$$

où p et q sont des nombres premiers impairs et inégaux, ces deux autres équations

$$(15) \qquad u^2 - a v^2 = -q^{2\sigma}, \quad u^2 - a v^2 = (-1)^{\vartheta+1} p^{\varrho} q^{\sigma}$$

sont aussi résolubles.

IV. Supposons résolubles les deux équations

$$(16) \qquad u^2 - a v^2 = -2^{2\varrho-2}, \quad u^2 - a v^2 = (-1)^{\vartheta} 2^{\varrho} q^{\sigma},$$

où $\varrho \geqq 3$, tandis que q est un nombre premier impair, ces deux autres équations

$$(17) \qquad u^2 - a v^2 = -q^{2\sigma}, \quad u^2 - a v^2 = (-1)^{\vartheta+1} 2^{\varrho} q^{\sigma}$$

sont aussi résolubles, et inversement.

Quant aux équations spéciales que nous venons de considérer, il nous reste encore de démontrer la proposition curieuse:

V. Supposons résolubles les deux équations

$$(18) \qquad u^2 - a v^2 = (-1)^{\vartheta} p^{\varrho}, \quad u^2 - a v^2 = (-1)^{\epsilon} q^{\sigma},$$

où a est une base de seconde espèce, tandis que p et q sont des nombres premiers inégaux, cette autre équation

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\varkappa} p^{\varrho} q^{\sigma} \tag{19}$$

n'est résoluble que pour une seule valeur de l'exposant $\varkappa$, savoir

$$\varkappa \equiv \delta + \varepsilon \pmod 2. \tag{20}$$

En effet, les solutions de l'équation (19), toujours résoluble, sont obtenues par la multiplication des deux équations (18), ce qui donnera immédiatement la seule valeur possible de $\varkappa$.

Supposons que les puissances p^{ϱ} et q^{σ} soient toutes deux plus grandes que 2, l'équation (19) est toujours du genre 4.

IV. Sur l'équation $u^2 - a v^2 = a - 1$.

Quant aux bases de seconde espèce qui sont la somme de deux carrés premiers entre eux, nous avons encore à démontrer un théorème curieux qui se rattache au paramètre

$$\omega = a - 1.^{1}$$

A cet effet, posons

$$q + (-1)^{\varepsilon} = p\beta, \tag{1}$$

où les positifs entiers p et β sont premiers entre eux, mais quelconques du reste, nous avons à étudier la base

$$a = p^2 + q^2. \tag{2}$$

Remarquons tout d'abord que les formules (1) et (2) donnent immédiatement

[1] Remarquons, en passant, que l'équation

$$u^2 - a v^2 = a - 1$$

n'est jamais résoluble, à moins que la base a ne soit une somme de deux carrés premiers entre eux, parce que cette autre équation

$$u^2 - a v^2 = 1 - a$$

est toujours résoluble, ayant la solution évidente (1, 1).

$$a-1 = p^2+p^2\beta^2-(-1)^\varepsilon 2p\beta$$
$$q+(-1)^\varepsilon a = q+(-1)^\varepsilon+(-1)^\varepsilon(a-1),$$

de sorte que nous aurons

$$q+(-1)^\varepsilon a = p\left(-\beta+(-1)^\varepsilon p(\beta^2+1)\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

(3) $q+(-1)^\varepsilon a = \pm p\alpha, \quad \alpha = |\beta-(-1)^\varepsilon p(\beta^2+1)| = p+aq.$

De plus, il est évident que les deux positifs entiers α et β ainsi définis sont premiers entre eux, car un facteur commun de α et β divise nécessairement p, ce qui est impossible.

Multiplions maintenant les deux équations évidentes

$$1^2-a\cdot 1^2 = -(a-1), \quad q^2-a\cdot 1^2 = -p^2,$$

il résulte

$$(q\pm a)^2-a(q\pm 1)^2 = p^2(a-1),$$

ce qui donnera, en vertu de (1) et (3),

(4) $$\alpha^2-a\beta^2 = a-1,$$

donc nous venons de démontrer le théorème susdit, savoir:

I. Supposons que la base a, définie par les formules (1) et (2), soit de seconde espèce, les équations

(5) $$u^2-av^2 = a-1, \quad u^2-av^2 = -(a-1)$$

sont toutes deux résolubles, ayant la solution $(p+q\beta, \beta)$ respectivement $(1, 1)$.

Soit, au contraire, a une base de première espèce, il peut arriver que les deux solutions susdites deviennent réciproques, ce qui a certainement lieu, pourvu que la base a soit une puissance impaire d'un nombre premier de la forme $4k+1$.

Exemples

$$13 = 2^2+3^2, \quad 41 = 4^2+5^2.$$

Or, il est très curieux, ce me semble, que 17 des 41 bases de seconde espèce de ce genre plus petites que 1500 sont de la forme susdite.

De plus, nous avons à démontrer la proposition:

II. Il existe une infinité de bases de seconde espèce qui se déterminent à l'aide des formules (1) et (2).

En effet, posons

$$a = \alpha^2 + (\alpha+1)^2 = 2\alpha(\alpha+1)+1, \tag{6}$$

où α est un positif entier quelconque, il est évident que cette base satisfait aux conditions susdites, car nous aurons par exemple

$$q = \alpha+1, \quad \varepsilon = 0, \quad \beta = 1, \quad p = \alpha.$$

De plus, l'équation

$$u^2 - av = a-1 \tag{7}$$

est, dans ce cas, satisfaite par

$$u = 2\alpha+1, \quad v = 1, \tag{8}$$

de sorte qu'il ne nous reste que de déterminer α, de sorte que la base a, définie par la formule (6), soit de seconde espèce.

Quant à cette détermination de α, nous nous proposons de résoudre, en positifs entiers, l'équation indéterminée

$$2\alpha(\alpha+1)+1 = \beta^2-4, \tag{9}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(2\alpha+1)^2 - 2\beta^2 = -9. \tag{10}$$

Or, 2 n'étant pas résidu quadratique du nombre premier 3, cette équation est irrésoluble, à moins que $2\alpha+1$ et β ne soient tous deux multiples de 3. Posons donc

$$2\alpha+1 = 3x, \quad \beta = 3y,$$

l'équation susdite se transforme en celle-ci

$$x^2 - 2y^2 = -1,$$

de sorte que nous aurons

$$x = A_{2n+1}, \quad y = B_{2n+1},$$

où généralement

$$A_m^2 - 2B_m^2 = (-1)^m,$$

ce qui donnera finalement, comme solution générale de l'équation (10),

$$\alpha_n = \frac{3A_{2n+1} - 1}{2}, \quad \beta_n = 3B_{2n+1}, \tag{11}$$

et pour la base a,

$$a_n = \frac{9A_{2n+1}^2 + 1}{2} = (3B_{2n+1} + 1)^2 - 4, \tag{12}$$

où il faut supposer $n > 0$, car l'hypothèse $n = 0$ donnera

$$a_0 = 5 = 3^2 - 4$$

qui est une base de première espèce.

Quant à la valeur générale a_n, définie par la formule (12), la plus petite solution de l'équation (7) correspondante est déterminée par

$$u = 2A_{2n+1}, \quad v = 1. \tag{13}$$

Remarquons ensuite que cette autre équation de Lagrange

$$u^2 - a_n v^2 = 4 \tag{14}$$

est, quel que soit l'indice n, satisfaite par

$$u = 3B_{2n+1} + 1, \quad v = 1, \tag{15}$$

puis observons que $a_n - 1$ est multiple de 4, nous aurons, en multipliant (14) par chacune des équations résolubles

$$u^2 - a_n v^2 = \pm(a_n - 1),$$

cette autre proposition:

III. Déterminons, par les formules (12), la base a_n de seconde espèce, les équations

(16) $u^2 - a_n v^2 = \frac{\alpha_n(\alpha_n+1)}{2}$, $u^2 - a_n v^2 = -\frac{\alpha_n(\alpha_n+1)}{2}$

sont toutes deux résolubles.

Soit par exemple $n = 1$, on aura

$$A_3 = 7, \quad B_3 = 5, \quad a_1 = 221, \quad \alpha_1 = 10,$$

ce qui donnera pour les équations

(17) $u^2 - 221 v^2 = 220, \quad u^2 - 221 v^2 = -220$

les solutions (21, 1) respectivement (1, 1).

Multiplions ensuite les deux équations (17) par celle-ci

$$14^2 - 221 \cdot 1^2 = -5^2,$$

nous aurons les deux autres solutions primitives de chacune des équations (17)

$$(47, 3), \quad (105, 7).$$

V. Sur la somme de deux carrés consécutifs.

Dans l'article II, nous avons démontré que le double d'une somme de deux carrés consécutifs est toujours une base de première espèce, et nous venons de démontrer, dans l'article précédent, qu'il existe une infinité de bases de seconde espèce qui sont la somme de deux carrés consécutifs.

Or, pour mettre en pleine lumière la nature très différente de telles nombres, nous avons encore à démontrer la proposition:

I. Il existe une infinité de bases de première espèce qui sont la somme de deux carrés consécutifs.

On voit immédiatement que cette proposition est une conséquence immédiate de celle-ci:

II. L'équation indéterminée

(1) $$x^2+(x+1)^2=y^2+4$$

admet une infinité de solutions.

A cet effet, remarquons que l'équation (1) se présente aussi sous la forme

(2) $$(2x+1)^2-2y^2=7,$$

nous avons à étudier l'équation de LAGRANGE

(3) $$u^2-2v^2=\pm 7$$

qui a ses deux solutions réciproques déterminées par les égalités

(4) $$1^2-2\cdot 2^2=-7,\quad 3^2-2\cdot 1^2=7.$$

Multiplions ensuite ces deux équations par

$$A_m^2-2B_m^2=(-1)^m,$$

il résulte respectivement

(5) $$(A_{n-1}+4B_{n-1})^2-2(2A_{n-1}+B_{n-1})^2=(-1)^n 7,$$

(6) $$(3A_{n-1}+2B_{n-1})^2-2(A_{n-1}+B_{n-1})^2=(-1)^{n-1}7,$$

de sorte que les formules récursives

$$A_m=A_{m-1}+2B_{m-1},\quad B_m=A_{m-1}+B_{m-1}$$

donnent

(7) $$(A_n+2B_{n-1})^2-2(B_n+A_{n-1})^2=(-1)^n 7$$

(8) $$(A_n+2A_{n-1})^2-2(A_n+B_{n-1})^2=(-1)^{n-1}7.$$

Cela posé, les solutions générales de l'équation (1) se présentent sous la forme

(9) $$\begin{cases} 2x_{2n}+1=A_{2n}+2B_{2n-1}, & y_{2n}=B_{2n}+A_{2n-1} \\ 2x_{2n+1}+1=A_{2n+1}+2A_{2n}, & y_{2n+1}=A_{2n+1}+B_{2n}. \end{cases}$$

Quant aux nombres (7) et (8) qui correspondent à n impair respectivement à n pair et qui représentent les solutions de l'équation

(10) $$(2x+1)^2-2y^2=-7,$$

posons $y=2z$, il résulte

$$\frac{x(x+1)}{2} = z^2 - 1, \tag{11}$$

et cette équation indéterminée admet donc les solutions générales

$$\begin{cases} 2x_{2n+1} + 1 = A_{2n+1} + 2B_{2n}, & 2z_{2n+1} = B_{2n+1} + A_{2n} \\ 2x_{2n} + 1 = A_{2n} + 2A_{2n-1}, & 2z_{2n} = A_{2n} + B_{2n-1}, \end{cases} \tag{12}$$

de sorte que nous venons de démontrer la proposition:

III. Il existe une infinité de nombres triangulaires qui sont égaux à un carré moins 1.

Il est évident du reste que la plupart des nombres triangulaires sont des bases de seconde espèce, ce qui a lieu par exemple, pourvu que le nombre en question soit multiple de 3.

Mais nous avons encore à démontrer cette autre proposition:

IV. Il existe une infinité de nombres triangulaires qui sont des bases de première espèce.

A cet effet, nous avons à résoudre l'équation indéterminée

$$(x+1)(2x+1) = y^2 + 1, \tag{13}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$x(2x+3) = y^2. \tag{14}$$

Remarquons que les deux facteurs x et $2x+3$ sont premiers entre eux, à moins que x ne soit multiple de 3, et que les deux facteurs en question ont, dans ce cas, le plus grand commun diviseur 3, la première de ces hypothèses donnera

$$x = \alpha^2, \quad 2x+3 = \beta^2. \quad y = \alpha\beta, \tag{15}$$

où α et β sont premiers entre eux.

Or, les deux premières des équations (15) donnent

$$\beta^2 - 2\alpha^2 = 3,$$

et cette équation étant irrésoluble, nous avons seulement à étudier le second cas, savoir

(16) $$x = 3\alpha^2, \quad 2x+3 = 3\beta^2, \quad y = 3\alpha\beta,$$

de sorte que nous aurons

$$\beta^2 - 2\alpha^2 = 1,$$

savoir

(17) $$\beta = A_{2n}, \quad \alpha = B_{2n}$$

(18) $$x = 3B_{2n}^2, \quad y = 3A_{2n}B_{2n}.$$

On voit que $325 = 13 \cdot 25$ est le plus petit nombre triangulaire qui se détermine par les formules précédentes.

DEUXIÈME PARTIE

Sur les bases $a = \alpha^2 + 1$.

VI. Formules récursives générales.

Les nombres de la forme

$$a = \alpha^2 + 1 ,$$

où α est un positif entier quelconque, sont évidemment les plus simples de toutes les bases, parce que la période de leur fraction continue ne contient que le seul nombre 2α. Dans nos développements précédents, nous avons plusieurs fois appliqué les bases de la forme susdite, et, dans nos recherches suivantes, nous avons à déduire de l'équation

$$u^2 - (\alpha^2 + 1) v^2 = \pm \omega \tag{1}$$

des éclaircissements intéressants sur les équations générales de Lagrange.

A cet effet, nous avons tout d'abord à indiquer l'expression générale des solutions (A_n, B_n) de l'équation de Fermat correspondante

$$A_n^2 - (\alpha^2 + 1) B_n^2 = (-1)^n . \tag{1}$$

Posons, pour $n \geq 2$,

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_n(\alpha) = 2^{n-1} \alpha^n + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{n}{2s} \binom{n-s-1}{s-1} (2\alpha)^{n-2s} \\ \psi_n(\alpha) = \sum_{n=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \binom{n-s-1}{s} (2\alpha)^{n-2s-1} , \end{cases}$$

et particulièrement, pour $n = 1$,

(3 bis) $$\varphi_1(\alpha) = \alpha, \quad \psi_1(\alpha) = 1,$$

nous aurons, quel que soit l'indice n,

(4) $$A_n = \varphi_n(\alpha), \quad B_n = \psi_n(\alpha).$$

Quant à l'équation (1), il est facile de démontrer le lemme fondamental:

I. L'équation (1) est toujours irrésoluble, à moins que

(5) $$\omega \geq 2\alpha.$$

A cet effet, étudions tout d'abord les équations (1) qui ont des solutions (u, v) situées dans l'intervalle I_1, ce qui exige

(6) $$u = \alpha - r, \quad v = 1, \quad 1 \leq r \leq \alpha - 1,$$

tandis que la valeur correspondante de ω deviendra

(7) $$\omega_r = 2r\alpha - r^2 + 1,$$

ce qui donnera immédiatement

$$\omega_r > \omega_s,$$

pourvu que $r > s$; c'est-à-dire que nous aurons constamment

(8) $$\omega_r \geq 2\alpha, \quad 1 \leq r \leq \alpha - 1.$$

Soit ensuite (u, v) et (u_1, v_1) deux solutions réciproques de l'équation (1), dont aucune n'appartient à l'intervalle I_1, nous aurons

$$u \geq \alpha, \quad v > 1, \quad u_1 > \alpha, \quad v_1 \geq 1,$$

où les signes d'égalité ne sont pas simultanées, il résulte

$$\omega = uv_1 + u_1 v > 2\alpha.$$

On voit immédiatement que la proposition I donnera, comme corollaire, cette autre:

II. L'équation de Lagrange

$$u^2-(\alpha^2+1)\,v^2=\pm 4 \tag{9}$$

est toujours irrésoluble, à moins que

$$\alpha=2,\quad a=5. \tag{10}$$

Revenons maintenant aux solutions générales (A_n, B_n) de l'équation (2), il résulte, en vertu des formules récursives de Lagrange,

$$A_n=\alpha A_{n-1}+(\alpha^2+1)\,B_{n-1}$$
$$B_n=\alpha B_{n-1}+A_{n-1}.$$

Soit ensuite

$$(u_1, v_1),\quad (u_2, v_2),\ \ldots,\quad (u_n, v_n),\ \ldots \tag{11}$$

une suite quelconque, formée des solutions de l'équation (1), nous aurons de même

$$u_n=\alpha u_{n-1}+(\alpha^2+1)\,v_{n-1}$$
$$v_n=\alpha v_{n-1}+u_{n-1},$$

ce qui donnera la proposition curieuse:

III. Les solutions (s_n, t_n) d'une suite quelconque appartenant ou à l'équation (1) ou à l'équation (2) satisfont aux formules récursives

$$s_n=\alpha t_n+t_{n-1},\quad t_n=\alpha t_{n-1}+s_{n-1},\quad n\geqq 2. \tag{12}$$

On voit, en effet, que la dernière de ces formules est la même que celles des B_n et des v_n, et l'on démontre facilement, par la conclusion de n à $n+1$, la formule des s_n.

Revenons maintenant à la suite (11), puis désignons par (u_1', v_1') la solution réciproque de (u_1, v_1) qui satisfait à l'équation

$$u_1^2-(\alpha^2+1)\,v_1^2=-\omega,$$

les formules fondamentales

$$u_1 u_1' + (\alpha^2+1)\, v_1 v_1' = \alpha\omega, \quad u_1 v_1' + v_1 u_1' = \omega$$

donnent immédiatement ces deux systèmes d'équations

(13) $$u_1 = \alpha v_1 - v_1', \quad v_1 = u_1' - \alpha v_1'$$

(14) $$u_1' = v_1 - \alpha v_1', \quad v_1' = \alpha v_1 - u_1.$$

M. C. Moreau[1], dans son essay maladroit de démontrer la proposition II, a trouvé par hasard, et appliqué sans critique, la première des formules récursives (12), car il ne voit pas que cette formule est inapplicable pour $n = 1$, et qu'elle doit, pour cette valeur de n, être remplacée par la formule correspondante (13) ou (14).

Remarquons, en passant, que M. Didier, qui a proposé de démontrer l'impossibilité de l'équation (9), abstraction faite de la seule valeur $\alpha = 2$, et la rédaction des Nouvelles Annales acceptent sans critique la démonstration manquée de M. Moreau, tandis que le *Jahrbuch*[2] indique, sans commentaire, que M. Moreau aurait résolu le problème susdit.

Cette manque de critique est du reste bien explicable, parce que les auteurs susdits n'ont pas connu les idées des suites coordonnées et des solutions réciproques.

Comme première application des développements précédents, nous avons à résoudre l'équation indéterminée

(15) $$x^2 + (\alpha x + 1)^2 = y^2,$$

où α est un positif entier quelconque.

On aura immédiatement, en vertu de (15),

$$x = \frac{-\alpha + \sqrt{(\alpha^2+1)\, y^2 - 1}}{\alpha^2+1},$$

ce qui exige tout d'abord

$$(\alpha^2+1)\, y^2 - 1 = z^2,$$

[1] Nouvelles Annales (2) t. 12, p. 330—331; 1873.

[2] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 5, p. 106; 1873.

où z est un positif entier, de sorte que nous aurons

$$x = \frac{A_{2n+1} - \alpha}{\alpha^2 + 1}, \quad y = B_{2n+1}, \quad z = A_{2n+1},$$

et il nous reste encore de déterminer l'indice n, de sorte que x devienne un nombre entier.

Or, la formule de Lagrange

$$A_{2n+1} = \alpha^{2n+1} + \sum_{s=1}^{s=n} \binom{2n+1}{2s} (\alpha^2+1)^s \alpha^{2n-2s+1}$$

donnera immédiatement

$$A_{2n+1} \equiv \alpha^{2n+1} \equiv (-1)^n \alpha \pmod{(\alpha^2+1)},$$

d'où il résulte

$$A_{2n+1} - \alpha \equiv \left((-1)^n - 1\right)\alpha \pmod{(\alpha^2+1)},$$

de sorte que n doit être un nombre pair, et la solution générale de l'équation (15) se présente sous la forme

$$x = \frac{A_{4n+1} - \alpha}{\alpha^2 + 1}, \quad y = B_{4n+1}. \tag{16}$$

Comme seconde application, nous avons à démontrer que l'équation indéterminée

$$u^2 - (\alpha^2+1)\, v^2 = \pm 36 \tag{17}$$

n'est résoluble, à moins que

$$\alpha = 6, \quad a = 37; \quad \alpha = 18, \quad a = 325.$$

En effet, on aura $\alpha < 18$, tandis que α doit être de la forme $6k$ et $4l+2$, ce qui donnera $\alpha = 12\nu + 6$, valeur qui n'est applicable, à moins que $\nu = 0$, $\nu = 1$.

VII. Valeur minimum du paramètre ω.

Il est bien curieux, ce me semble, qu'il soit possible de déterminer, quel que soit le positif entier α, la plus petite valeur de ω, pour laquelle l'équation de Lagrange

(1) $$u^2-(\alpha^2+1)\,v^2=\pm\omega$$

est résoluble.

A cet effet, nous avons tout d'abord à étudier les équations susdites qui admettent la solution

(2) $$u_1=r\alpha+s,\quad v_1=r,$$

où r et s sont des positifs entiers, ce qui donnera

(3) $$\omega=2rs\alpha-r^2+s^2,$$

tandis que la solution réciproque de (u_1, v_1) deviendra

(4) $$u_1'=s\alpha-r,\quad v_1'=s.$$

Quant aux éléments généraux (u_n, v_n) et (u_n', v_n') des deux suites coordonnées ainsi définies, les formules récursives donnent

(5) $$\begin{cases} u_n=rA_n+sA_{n-1}, & v_n=rB_n+sB_{n-1} \\ u_n'=sA_n-rA_{n-1}, & v_n'=sB_n-rB_{n-1}, \end{cases}$$

de sorte que nous pouvons déduire (u_n', v_n') de (u_n, v_n), en changeant le signe α, puis permutant r et s.

Soit par exemple, dans (4), $s=1$, on aura

(6) $$\omega=2r\alpha-r^2+1,$$

et les solutions réciproques déviennent

(6 bis) $$u_1=\alpha-r,\quad v_1=1;\quad u_1'=r\alpha+1,\quad v_1'=r,$$

ce qui donnera généralement

(7) $$\begin{cases} u_n=A_n-rA_{n-1}, & v_n=B_n-rB_{n-1} \\ u_n'=rA_n-A_{n-1}, & v_n'=rB_n-B_{n-1}. \end{cases}$$

Posons ensuite, dans (3), $r=1$, puis remplaçons s par r, il résulte

(8) $$\omega=2\alpha r+r^2-1,$$

tandis que les solutions réciproques deviennent

(8 bis) $u_1 = \alpha + r, \quad v_1 = 1; \quad u_1' = r\alpha - 1, \quad v_1' = r,$

et nous aurons généralement

$$(9) \qquad \begin{cases} u_n = A_n + rA_{n-1}, & v_n = B_n + rB_{n-1} \\ u_n' = rA_n - A_{n-1}, & v_n' = rB_n - B_{n-1}. \end{cases}$$

Cela posé, nous avons à étudier séparément les dernières formules qui correspondent à $r = 1$ et $r = 2$, parce que les résultats ainsi obtenus sont nécessaires pour nos recherches suivantes.

Quant à l'hypothèse $r = 1$, les formules (6 bis) et (8 bis) donnent le même couple de solutions réciproques, savoir

(10) $u_1 = \alpha - 1, \; v_1 = 1; \; u_1' = \alpha + 1, \; v_1' = 1, \; \omega = 2\alpha,$

tandis que nous aurons respectivement, pour $r = 2$,

(11) $u_1 = \alpha - 2, \; v_1 = 1; \; u_1' = 2\alpha + 1, \; v_1' = 2; \; \omega = 4\alpha - 3$

(12) $u_1 = \alpha + 2, \; v_1 = 1; \; u_1' = 2\alpha - 1, \; v_1' = 2; \; \omega = 4\alpha + 3.$

Remarquons ensuite que l'équation (1) qui correspond à ces valeurs spéciales n'est résoluble, à moins que u_1 et ω ne soient premiers entre eux, nous aurons à considérer les trois valeurs susdites de ω.

1° $\omega = 2\alpha$; l'équation (1) est résoluble, pourvu que α soit un nombre pair, et seulement dans ce cas.

2° $\omega = 4\alpha - 3$; l'égalité $\omega - 4u_1 = 5$ montre que u_1 et ω sont premiers entre eux, pourvu qu'ils ne soient pas tous deux multiples de 5, ce qui donnera

(13) $$\alpha = 10k + 7.$$

3° $\omega = 4\alpha + 3$; on aura ici $4u_1 - \omega = 5$, de sorte que l'équation (1) est résoluble, à moins que

(14) $$\alpha = 10k + 3.$$

Cela posé, nous avons à démontrer le théorème fondamental:

I. La plus petite valeur du paramètre ω, pour lequel l'équation (1) est résoluble, se détermine comme suit:

1° $\omega = 2\alpha$, pour une valeur paire quelconque de α.

2° $\omega = 4\alpha - 3$, pour α impair, plus grand que 1 et n'étant pas de la forme $10k+7$.

3° $\omega = 4\alpha + 3$, pour $\alpha = 1$, $\alpha = 10k+7$.

En effet, remarquons tout d'abord que l'inégalité

$$2r\alpha + r^2 - s^2 > 4\alpha + 3 \tag{15}$$

est applicable pour

$$r \geqq 2, \quad \alpha \geqq s \geqq 2,$$

ce qui donnera

$$r^2 > 3, \quad s\alpha \geq s^2,$$

de sorte que l'inégalité (15) est certainement établie, pourvu que

$$(2r-1)s\alpha > 4\alpha,$$

inégalité qui est évidente.

Il nous reste encore d'étudier les cas suivants, où nous supposons constamment $\alpha > 2$, et où nous désignons par (u, v) une solution primitive de l'équation (1):

1° $u \geqq 2\alpha^2 + 1$; dans ce cas, nous aurons

$$\omega = vu_1 + uv_1 > 2\alpha^2 + 2 > 4\alpha + 3;$$

car la solution (u_1, v_1) réciproque de (u, v) satisfait évidemment aux conditions $u_1 \geqq 1$, $v_1 \geqq 1$.

2° $u = \alpha - r$, $v = t$; $1 \leqq r \leqq \alpha - 1$, $t \geqq 2$, ce qui donnera

$$\omega = t^2(\alpha^2+1) - (\alpha - r)^2 = (t^2-1)\alpha^2 + 2r\alpha + t^2 - r^2 > 3\alpha^2 + 4.$$

3° $u = r\alpha + s$, $v = t$; $r > 1$, $1 \leqq s \leqq \alpha - 1$.

Soit tout d'abord $2\alpha > r > t$ on aura

$$\omega = (r^2 - t^2)\alpha^2 + 2rs\alpha + s^2 - t^2,$$

et l'inégalité évidente

$$2rs\alpha - t^2 > r(2s\alpha - r) \geqq r(2\alpha - r) \geqq 0$$

donnera immédiatement

$$\omega > (r^2 - t^2)\alpha^2 + s^2 \geqq (2t+1)\alpha^2 + 1 > 4\alpha + 3.$$

Soit, au contraire, $t > r$, on aura

$$\omega = (t^2 - r^2)\alpha^2 - 2rs\alpha + t^2 - s^2,$$

et les inégalités évidentes

$$t^2 - r^2 \geqq 2r+1, \quad t^2 \geqq 4, \quad s \leqq \alpha - 1$$

donnent

$$\omega \geqq (2r+1)\alpha^2 - 2r\alpha(\alpha-1) - (\alpha-1)^2 + 4,$$

savoir

$$\omega > 2r\alpha + 2\alpha + 3 \geqq 4\alpha + 3.$$

Cela posé, nous avons encore à étudier la valeur spéciale $\alpha = 1$, car cette hypothèse donnera $4\alpha - 3 = 1$, et enfin nous avons à comparer la valeur $4\alpha + 3$ et le nombre $6\alpha - 8$, obtenu de ω en y posant $r = 3$.

Quant aux hypothèses $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, la plus petite valeur applicable de ω deviendra respectivement $4\alpha + 3 = 7$ et $2\alpha = 4$.

Dans le second cas indiqué, on aura évidemment

$$6\alpha - 8 > 4\alpha + 3,$$

pourvu que $\alpha > 6$, de sorte qu'il ne nous reste à étudier que les valeurs $\alpha = 3$, $\alpha = 5$, qui donnent tous deux la valeur minimum $\omega = 4\alpha - 3$.

VIII. Genre des équations au paramètre minimum.

Les résultats que nous venons d'obtenir, dans l'article précédent, nous permettent de déterminer, quel que soit α, le genre des équations qui correspondent à la valeur minimum du paramètre ω.

A cet effet, nous avons à demontrer les propositions suivantes:

I. Soit α un nombre pair quelconque, l'équation résoluble

(1) $$u^2-(\alpha^2+1)v^2=\pm 2\alpha$$

est toujours du genre 2.

Remarquons que l'équation (1) admet les deux solutions réciproques

(2) $$(\alpha-1,\ 1),\quad (\alpha+1,\ 1),$$

il s'agit de démontrer que cette équation ne peut admettre aucun autre couple des solutions réciproques (u, v) et (u_1, v_1).

Or, nous savons dès à présent qu'aucune de ces solutions ne peut être située dans l'intervalle I_1; c'est-à-dire que nous aurons

$$u>\alpha,\quad v>1;\quad u_1\geqq\alpha,\quad v_1>1,$$

où les signes d'égalité ne sont pas simultanées, mais cette hypothèse conduira à l'absurdité

$$2\alpha=uv_1+u_1v>2\alpha.$$

II. Désignons par α un positif entier qui n'est pas de la forme $5k+2$, mais quelconque du reste, l'équation résoluble

(3) $$u^2-(\alpha^2+1)v^2=\pm(4\alpha-3)$$

est toujours du genre 2.

Nous aurons ici les deux solutions réciproques

(4) $$(\alpha-2,\ 1),\quad (2\alpha+1,\ 2),$$

et l'équation (3) ne possède aucune autre solution située dans l'intervalle I_1.

Soient ensuite (u, v) et (u_1, v_1) deux autres solutions réciproques de l'équation (3), de sorte que l'on aura par exemple

(5) $$u^2-(\alpha^2+1)v^2=4\alpha-3,$$

je dis que

$$u>3\alpha,\quad v\geq 3.$$

En effet, l'hypothèse $v = 1$ conduira, en vertu de (5), à l'absurdité

$$u^2 = \alpha^2 + 4\alpha - 2 = (\alpha + 2)^2 - 6,$$

et la valeur $v = 2$ est dès à présent exclue, parce qu'elle conduira à la seconde des solutions (4).

Soit donc $v \geqq 3$, l'équation (5) donnera immédiatement $u > 3\alpha$, tandis que l'on aura, pour la solution réciproque,

$$u_1 > \alpha, \quad v_1 \geqq 1,$$

ce qui conduira à l'absurdité

$$4\alpha - 3 = uv_1 + u_1 v > 6\alpha.$$

Changeons maintenant, dans l'équation (3), le signe de α, il résulte cette autre proposition:

III. Désignons par α un positif entier qui n'est pas de la forme $5k-2$, mais étant quelconque du reste, l'équation résoluble

$$u^2 - (\alpha^2 + 1)v^2 = \pm(4\alpha + 3) \tag{6}$$

est toujours du genre 2.

Nous avons encore à multiplier les deux équations (3) et (6), ce qui nous conduira à des résultats curieux concernant l'équation ainsi obtenue

$$u^2 - (\alpha^2 + 1)v^2 = \pm(16\alpha^2 - 9). \tag{7}$$

Les solutions primitives des deux équations susdites étant

$$(\alpha - 2, 1), \quad (\alpha + 2, 1),$$

l'équation (7), supposée résoluble, aura les deux solutions primitives

$$(5, 4), \quad (\alpha^2 - 3, 2\alpha), \tag{8}$$

dont la première est indépendante de α.

Quant à la résolubilité de l'équation (7), remarquons que les deux paramètres $4\alpha + 3$ et $4\alpha - 3$ ne sont premiers

entre eux, à moins que α ne soit pas multiple de 3, nous aurons nécessairement

(9) $$\alpha = 3k \pm 1.$$

De plus, la base $\alpha^2 + 1$ et le paramètre $(4\alpha + 3)(4\alpha - 3)$ sont premiers entre eux, pourvu que α ne soit pas de la forme $5k \pm 2$, nous aurons donc

(10) $$\alpha = 5k, \quad \alpha = 5k \pm 1,$$

et une combinaison des deux formules (9) et (10) donnera la proposition:

IV. L'équation (7) est résoluble pour

(11) $$\alpha = 15k \pm 1, \quad \alpha = 15k \pm 4, \quad \alpha = 15k \pm 5,$$

et seulement dans ces cas.

Quant à l'équation (7), nous avons encore à démontrer cette autre proposition:

V. L'équation (7), supposée résoluble, est toujours du genre 4.

En effet, multiplions l'équation (7) par une quelconque des deux équations (3) et (6), nous aurons nécessairement la seconde de ces deux équations, ce qui exige que (7) soit précisément du genre 4.

Quant à la multiplication des équations (3) et (6), où α n'est pas une des valeurs indiquées dans la formule (11), supposons par exemple

$$\alpha = 3z, \quad z = 5k, \quad z = 5k \pm 1,$$

la multiplication susdite donnera, pour l'équation

(12) $$u^2 - (9z^2 + 1)v^2 = \pm 9(16z^2 - 1),$$

la solution primitive (5, 4) et, pour l'équation

(13) $$u^2 - (9z^2 + 1)v^2 = \pm (16z^2 - 1),$$

la solution primitive $(6z^2 - 1, 2z)$, et chacune des équations (12) et (13) est toujours du genre 2, quel que soit le nombre z.

IX. Sur les solutions des équations précédentes.

Nous avons encore à étudier la nature algébrique des solutions des trois équations du rang 2 que nous venons de considérer.

A cet effet, désignons par

$$(1) \qquad (s_n(\alpha),\ t_n(\alpha)),\quad (\sigma_n(\alpha),\ \tau_n(\alpha))$$

les solutions générales de l'équation

$$(2) \qquad u^2-(\alpha^2+1)\,v^2 = \pm 2\alpha,$$

de sorte que

$$s_1(\alpha) = \alpha-1,\quad t_1(\alpha) = 1$$

est la solution située dans l'intervalle I_1.

Cela posé, il est évident que l'intervalle I_2 contient les deux solutions

$$\sigma_2(\alpha) = \alpha+1,\qquad \tau_2(\alpha) = 1$$
$$s_2(\alpha) = 2\alpha^2-\alpha+1,\quad t_2(\alpha) = 2\alpha-1,$$

et que nous aurons, quel que soit l'indice n,

$$(3) \quad s_n^2(\alpha)-(\alpha^2+1)\,t_n^2(\alpha) = \sigma_n^2(\alpha)-(\alpha^2+1)\,\tau_n^2(\alpha) = (-1)^n 2\alpha,$$

où les solutions appartiennent toutes deux à l'intervalle I_n,

Quant aux polynomes entiers ainsi définis, les formules récursives générales de l'article VII donnent

$$(4) \quad s_n(\alpha) = \varphi_n(\alpha)-\varphi_{n-1}(\alpha),\qquad t_n(\alpha) = \psi_n(\alpha)-\psi_{n-1}(\alpha)$$
$$(5) \quad \sigma_n(\alpha) = \varphi_{n-1}(\alpha)+\varphi_{n-2}(\alpha),\quad \tau_n(\alpha) = \psi_{n-1}(\alpha)+\psi_{n-2}(\alpha),$$

où $\varphi_n(\alpha)$ et $\psi_n(\alpha)$ sont les polynomes entiers introduits dans l'article VI, et où il faut poser, comme ordinairement,

$$\varphi_0(\alpha) = 1,\quad \psi_0(\alpha) = 0.$$

On voit que les formules générales (4) et (5) donnent immédiatement les identités

$$(6) \quad (-1)^n s_n(-\alpha) = \sigma_{n+1}(\alpha),\quad (-1)^{n-1} t_n(-\alpha) = \tau_{n+1}(\alpha),$$

qui s'accordent bien avec les formules (3).

Appliquons maintenant les formules récursives

$$\varphi_n(\alpha) = 2\alpha\varphi_{n-1}(\alpha) + \varphi_{n-2}(\alpha)$$
$$\psi_n(\alpha) = 2\alpha\psi_{n-1}(\alpha) + \psi_{n-2}(\alpha),$$

tirées directement de la fraction continue qui représente $\sqrt{\alpha^2+1}$, il résulte, en vertu de (4),

$$(7) \qquad \begin{cases} s_n(\alpha) = (2\alpha-1)\,\varphi_{n-1}(\alpha) + \varphi_{n-2}(\alpha) \\ t_n(\alpha) = (2\alpha-1)\,\psi_{n-1}(\alpha) + \psi_{n-2}(\alpha), \end{cases}$$

ce qui donnera la fraction continue

$$(8) \qquad \frac{s_n(\alpha)}{t_n(\alpha)} = (\alpha,\ 2\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ 2\alpha,\ 2\alpha-1)$$

valable, pourvu que $n > 2$.

En effet, on voit que les numérateurs et les dénominateurs des réduites de la fraction continue ne sont, abstraction faite des derniers, autre chose que les polynomes $\varphi_m(\alpha)$ et $\psi_m(\alpha)$, de sorte que la fraction continue (8) est une conséquence immédiate des formules récursives (7).

Le même procédé donnera, en vertu de (5), cette autre fraction continue

$$(9) \qquad \frac{\sigma_n(\alpha)}{\tau_n(\alpha)} = (\alpha,\ 2\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ 2\alpha,\ 1),$$

où il faut également supposer $n > 2$.

Quant à l'équation

$$(10) \qquad u^2 - (\alpha^2+1)\,v^2 = \pm(4\alpha+3),$$

elle n'admet aucune solution située dans l'intervalle I_1.

Posons donc

$$(11) \quad k_2(\alpha) = 2\alpha-1,\ \ l_2(\alpha) = 2;\ \ z_2(\alpha) = \alpha+2,\ \ \lambda_2(\alpha) = 1,$$

les solutions générales de l'équation (10) se présentent sous la forme

$$(12)\quad \begin{cases} k_n(\alpha) = 2\varphi_{n-1}(\alpha) - \varphi_{n-2}(\alpha), & l_n(\alpha) = 2\psi_{n-1}(\alpha) - \psi_{n-2}(\alpha) \\ z_n(\alpha) = \varphi_{n-1}(\alpha) + 2\varphi_{n-2}(\alpha), & \lambda_n(\alpha) = \psi_{n-1}(\alpha) + 2\psi_{n-2}(\alpha) \end{cases}$$

et nous aurons, quel que soit l'indice n,

$$(13)\quad \begin{cases} k_n^2(\alpha) - (\alpha^2+1)\, l_n^2(\alpha) = (-1)^{n+1}(4\alpha+3) \\ z_n^2(\alpha) - (\alpha^2+1)\, \lambda_n^2(\alpha) = (-1)^n(4\alpha+3), \end{cases}$$

tandis que les formules (12) donnent immédiatement les fractions continues

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{k_n(\alpha)}{l_n(\alpha)} = (\alpha,\ 2\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ 2\alpha,\ -2) \\ \dfrac{z_n(\alpha)}{\lambda_n(\alpha)} = \left(\alpha,\ 2\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ 2\alpha,\ \dfrac{1}{2}\right), \end{cases}$$

où il faut supposer $n > 2$.

Quant à la troisième des équations susdites, nous avons seulement à changer le signe de α, dans les formules précédentes, de sorte que les derniers quotients des fractions continues, obtenues de (14), deviennent 2 et $-\frac{1}{2}$ respectivement.

X. Sur le paramètre $\omega = \alpha^2$.

Nous avons encore à appliquer l'opération itérative sur l'équation (1) de l'article VIII.

A cet effet, multiplions les deux équations

$$u^2 - (\alpha^2+1)\, v^2 = (-1)^{\varkappa} 2\alpha, \quad u_1^2 - (\alpha^2+1)\, v_1^2 = (-1)^{\lambda} 2\alpha,$$

il résulte

$$(1)\quad (uu_1 \pm (\alpha^2+1)\, vv_1)^2 - (\alpha^2+1)(u v_1 \pm u_1 v)^2 = (-1)^{\varkappa+\lambda} 4\alpha^2,$$

ce qui conduira à cette autre équation de LAGRANGE

$$(2)\qquad u^2 - (\alpha^2+1)\, v^2 = \pm \alpha^2,$$

toujours résoluble, parce qu'elle admet, dans l'intervalle I_1, une solution $(c_1(\alpha),\ d_1(\alpha))$, déterminée par

$$(3)\qquad c_1(\alpha) = 1, \quad d_1(\alpha) = 1.$$

Cela posé, il est évident que les deux suites coordonnées, dont l'élément primitif est la solution susdite, dans l'intervalle I_2, ont les deux solutions

$$(4)\qquad \begin{cases} \gamma_2(\alpha) = \alpha^2 - \alpha + 1, & \delta_2(\alpha) = \alpha - 1 \\ c_2(\alpha) = \alpha^2 + \alpha + 1, & d_2(\alpha) = \alpha + 1, \end{cases}$$

donc l'intervalle I_n contient aussi (pour $n > 1$) deux solutions des suites susdites

$$(5)\qquad \big(\gamma_n(\alpha),\ \delta_n(\alpha)\big),\quad \big(c_n(\alpha),\ d_n(\alpha)\big),$$

de sorte que nous aurons, quel que soit l'indice n,

$$(6)\qquad \gamma_n^2(\alpha) - (\alpha^2+1)\,\delta_n^2(\alpha) = c_n^2(\alpha) - (\alpha^2+1)\,d_n^2(\alpha) = (-1)^n\alpha^2.$$

Quant à la détermination des solutions générales (5) que nous désignons souvent par (γ_n, δ_n) respectivement (c_n, d_n), prenons pour point de départ les formules spéciales

$$s_1 s_1 + (\alpha^2+1)\,t_1 t_1 = 2\gamma_2, \qquad s_1 t_1 + t_1 s_1 = 2\delta_2$$
$$\sigma_2\sigma_2 + (\alpha^2+1)\,\tau_2\tau_2 = 2c_2, \qquad \sigma_2\tau_2 + \tau_2\sigma_2 = 2d_2,$$

établies par un calcul direct, les formules récursives de Lagrange donnent généralement

$$(7)\qquad s_n s_p + (\alpha^2+1)\,t_n t_p = 2\gamma_{n+p}, \quad s_n t_p + t_n s_p = 2\delta_{n+p}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} \sigma_{n+1}\sigma_{p+1} + (\alpha^2+1)\,\tau_{n+1}\tau_{p+1} = 2c_{n+p}, \\ \sigma_{n+1}\tau_{p+1} + \tau_{p+1}\sigma_{n+1} = 2d_{n+p}, \end{cases}$$

formules qui donnent des éclaircissements intéressants sur les quatre polynomes en question.

En premier lieu, les formules spéciales (4) donnent immédiatement, en vertu de (6),

$$(9)\qquad (-1)^m c_m(-\alpha) = \gamma_m(\alpha), \quad (-1)^m d_m(-\alpha) = \delta_m(\alpha).$$

De plus, soit, dans (7) et (8), $p = n$, il résulte

$$(10)\qquad \gamma_{2n}(\alpha) = s_n^2(\alpha) - (-1)^n\alpha, \qquad \delta_{2n}(\alpha) = s_n(\alpha)\,t_n(\alpha)$$
$$(11)\qquad c_{2n}(\alpha) = \sigma_{n+1}^2(\alpha) + (-1)^n\alpha, \qquad d_{2n}(\alpha) = \sigma_{n+1}(\alpha)\,\tau_{n+1}(\alpha).$$

Appliquons ensuite les formules speciales

$$s_1\sigma_2-(\alpha^2+1)\,t_1\tau_2=-2c_1,\quad s_1\tau_2-t_1\sigma_2=-2<d_1,$$
$$s_2\sigma_2-(\alpha^2+1)\,t_2\tau_2=2\gamma_2,\qquad t_2\sigma_2-s_2\tau_2=2\delta_2,$$

les formules récursives de LAGRANGE donnent, pour $n>p$,

$$(12)\qquad \begin{cases} \sigma_n s_p-(\alpha^2+1)\,\tau_n s_p=(-1)^p 2\gamma_{n-p},\\ s_p t_n-t_p\sigma_n=(-1)^p 2\delta_{n-p},\end{cases}$$

et pour $n\leqq p$,

$$(13)\qquad \begin{cases} s_p\sigma_n-(\alpha^2+1)\,t_p\tau_n=(-1)^n 2\gamma_{p-n+2},\\ s_p\tau_n-t_p\sigma_n=(-1)^n 2\delta_{p-n+2},\end{cases}$$

de sorte qu'il résulte, pour $p=n$, les deux formules curieuses

$$(14)\quad s_n\sigma_n-(\alpha^2+1)\,t_n\tau_n=(-1)^n 2\gamma_2,\quad s_n\tau_n-t_n\sigma_n=(-1)^n 2\delta_2,$$

valables pour $n\geqq 2$.

Quant aux quatre polynomes qui nous occupent ici, nous aurons les expressions explicites

$$(15)\qquad \begin{cases} c_n(\alpha)=\varphi_n(\alpha)-(\alpha-1)\,\varphi_{n-1}(\alpha),\\ d_n(\alpha)=\psi_n(\alpha)-(\alpha-1)\,\psi_{n-1}(\alpha)\end{cases}$$

$$(16)\qquad \begin{cases} \gamma_n(\alpha)=\varphi_n(\alpha)-(\alpha+1)\,\varphi_{n-1}(\alpha),\\ \delta_n(\alpha)=\psi_n(\alpha)-(\alpha+1)\,\psi_{n-1}(\alpha)\end{cases}$$

$$(17)\qquad \begin{cases} c_n(\alpha)=(\alpha+1)\,\varphi_{n-1}(\alpha)+\varphi_{n-2}(\alpha),\\ d_n(\alpha)=(\alpha+1)\,\psi_n(\alpha)+\psi_{n-1}(\alpha)\end{cases}$$

$$(18)\qquad \begin{cases} \gamma_n(\alpha)=(\alpha-1)\,\varphi_{n-1}(\alpha)+\varphi_{n-2}(\alpha),\\ \delta_n(\alpha)=(\alpha-1)\,\psi_{n-1}(\alpha)+\psi_{n-2}(\alpha).\end{cases}$$

En effet, soit $n=2$, ces quatre formules ne sont autre chose que les expressions (4), donc les formules générales sont les conséquences immédiates des formules récursives ordinaires.

Remarquons, en passant, qu'il résulte, en vertu de (17) et (18), les deux fractions continues

$$\frac{c_n(\alpha)}{d_n(\alpha)} = (\alpha,\ 2\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,,\ 2\alpha,\ \alpha+1) \tag{19}$$

$$\frac{\gamma_n(\alpha)}{\delta_n(\alpha)} = (\alpha,\ 2\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots.,\ 2\alpha,\ \alpha-1), \tag{20}$$

où il faut supposer $n > 2$, et, dans la dernière $\alpha > 1$.

Dans le cas spécial

$$\alpha = 2\,,\quad a = 5\,,$$

et seulement dans ce cas, l'équation (2) est identique à l'équation (2) de l'article précédent, de sorte que les solutions $(s_n,\ t_n)$ et $(\sigma_n,\ \tau_n)$ coïncident avec $(c_n,\ d_n)$ et $(\gamma_n,\ \delta_n)$ respectivement.

On voit du reste que l'hypothèse $\alpha = 2$ conduira à l'équation

$$u^2 - 5v^2 = \pm 4\,, \tag{21}$$

que nous avons mentionnée dans l'article VI et que nous retrouverons encore une fois, dans l'article XIV.

Quant à l'équation (2), il est évident que les fonctions

$$\big(c_n(\alpha),\ d_n(\alpha)\big)\,,\quad \big(\gamma_n(\alpha),\ \delta_n(\alpha)\big)\,,$$

représentent la solution complète, en polynomes entiers, de l'identité algébrique

$$\big(f_n(\alpha)\big)^2 - (\alpha^2+1)\big(g_n(\alpha)\big)^2 = \pm\alpha^2\,, \tag{22}$$

mais nous remarquons expressément que cette solution complète de l'identité algébrique (22) ne donne pas toujours toutes les solutions, en positifs entiers, de l'équation (2), ce qui est très curieux, ce me semble.

En effet, soit $2\alpha^2+1$ un carré exact, savoir

$$2\alpha^2 + 1 = \beta^2\,,$$

ce qui donnera

$$\alpha = B_{2n},\quad \beta = A_{2n}, \tag{23}$$

où nous avons posé généralement

$$A_m^2 - 2B_m^2 = (-1)^m,$$

l'équation (2) admet évidemment la solution

$$u = B_{2n}, \quad v = 1 \tag{24}$$

qui ne coïncide, pour $\alpha > 2$ et $n > 1$, avec aucune des solutions (c_n, d_n) et (γ_n, δ_n).

Soit, au contraire $\alpha = 2$, ce qui donnera, en vertu de (16),

$$u = 1, \quad \beta = 3,$$

nous retrouvons de nouveau la base singulière

$$a = 5,$$

et, dans ce cas, les valeurs (24) ne représentent aucune solution nouvelle de l'équation (2),

Soit par exemple $n = 2$, on aura

$$A_4 = 17, \quad B_4 = 12,$$

ce qui conduira à l'équation indéterminée

$$u^2 - 145v^2 = \pm 144 \tag{25}$$

qui est par conséquent du genre 4, ayant ses deux couples de suites coordonnées déterminées par les solutions primitives

$$(1, 1), \quad (17, 1).$$

Ce résultat est très intéressant, ce me semble, parce qu'il donnera une infinité d'équations du genre 4 obtenues par l'opération itérative des équations du genre 2.

XI. Détermination du rang de certains nombres.

Il nous reste encore, dans notre étude sur la base

$$a = \alpha^2 + 1, \tag{1}$$

de déterminer le rang de certains nombres spéciaux, problème qui est facile à résoudre à l'aide des valeurs

(2) $$B_1 = 1, \quad B_2 = 2\alpha, \quad B_3 = 4\alpha^2 + 1,$$

où nous avons posé, quel que soit l'indice m,

$$A_m^2 - (\alpha^2 + 1) B_m^2 = (-1)^m.$$

Nous aurons, en effet, les propositions suivantes:

I. Le nombre premier 2 est, par rapport à la base $\alpha^2 + 1$, toujours du rang 2.

II. Supposons que α se présente sous la forme

(3) $$\alpha = 3z \pm \lambda, \quad \lambda = 0, 1.$$

le nombre 3 est, par rapport à la base $\alpha^2 + 1$, du rang $2\lambda + 2$.

En effet, soit α multiple de 3, B_2 aura la même propriété, donc 3 est du rang 2. Soit, au contraire $\alpha = 3z \pm 1$, on aura

$$a = \alpha^2 + 1 \equiv 2 \pmod 3,$$

et il résulte immédiatement, en vertu d'un théorème connu, que 3 est par rapport à la base $\alpha^2 + 1$, du rang 4.

III. Supposons que α se présente sous la forme

(4) $$\alpha = 5z \pm \lambda, \quad \lambda = 1, 2,$$

le nombre premier 5 est par rapport à la base $\alpha^2 + 1$, du rang $2\lambda + 1$.

Soit tout d'abord $\lambda = 1$, on aura, en vertu de (2),

$$B_2 \equiv \pm 2 \pmod 5, \quad B_3 \equiv 0 \pmod 5,$$

et 5 est du rang 3. Soit ensuite $\lambda = 2$, on trouve

$$a \equiv 0 \pmod 5,$$

de sorte que 5 est diviseur premier régulier de la base a, donc 5 est, par rapport à $\alpha^2 + 1$, du rang 5.

Cela posé, on aura immédiatement, comme corollaire, cette autre proposition:

IV. Supposons que α ne soit pas multiple de 5, le nombre

$$a_n = 5^{2n}(\alpha^2+1) \tag{5}$$

est toujours une base de première espèce.

En effet, on voit que a_1 est certainement une base de première espèce, et 5 est diviseur premier régulier de la base a_n, quel que soit l'indice n.

Quant à la base a_n, où α est multiple de 5, la valeur générale de B_2 donnera immédiatement la proposition:

V. Soient p, q, n des positifs entiers quelconques, le nombre

$$a_n = p^{2n}(p^2q^2+1) \tag{6}$$

est toujours une base de seconde espèce.

On voit que cette dernière proposition donnera immédiatement la règle suivante pour la formation des bases de seconde espèce qui sont une somme de deux carrés, premiers entre eux:

VI. Soit α_1 un diviseur, impair et plus grand que l'unité, du nombre

$$\alpha = p^2+q^2, \tag{7}$$

où p et q sont premiers entre eux, la base de seconde espèce

$$\alpha_1^{2n}(\alpha^2+1) \tag{8}$$

est, quel que soit le positif entier n, une somme de deux carrés premiers entre eux.

Quant aux bases

$$\alpha_1(\alpha^2+1), \tag{9}$$

formées à l'aide des nombres α et α_1 qui figurent dans la règle précédente, elles sont tantôt de première tantôt de seconde espèce.

J'ai par exemple examiné les onze nombres

$$\begin{aligned} 5(5^2+1) &= 130 & 5(10^2+1) &= 505 \\ 5(15^2+1) &= 1130 & 5(20^2+1) &= 2005 \\ 5(25^2+1) &= 3130 & 5(30^2+1) &= 4505 \\ 5(35^2+1) &= 6130 & 5(40^2+1) &= 8005 \\ 5(45^2+1) &= 10130 & 5(50^2+1) &= 12505 \\ 5(55^2+1) &= 15130 = 123^2+1. \end{aligned}$$

et trouvé que seulement trois de ces bases sont de seconde espèce, savoir

$$505 \quad 2005 \quad 12505.$$

Dans le dernier article de ce Mémoire, nous avons à revenir à la forme singulière du nombre 15130.

Remarquant, en passant, que nous aurons

$$403^2 - 2005 \cdot 9^2 = 4$$

$$1141^2 - 4505 \cdot 17^2 = -64, \quad 4497^2 - 4505 \cdot 67^2 = 64,$$

de sorte que 2005 est une base de seconde espèce, 4505 une base de première espèce.

Il nous reste d'étudier un peu plus profondément la base 2005, parce qu'elle nous donnera des éclaircissements intéressants sur les équations de Lagrange, dont le paramètre contient deux facteurs premiers impairs.

A cet effet, remarquons tout d'abord que la fraction continue de $\sqrt{2005}$ deviendra, avec les significations de Degen,

$$\begin{array}{cccccc} 44, & 1, & 3, & 2, & 21, & (1) \\ 1 & 69 & 30 & 39 & 4 & 81 \end{array}$$

de sorte que nous aurons les réduites de cette fraction continue

$$\frac{44}{1} \quad \frac{45}{1} \quad \frac{179}{4} \quad \frac{403}{9} \quad \frac{8642}{193},$$

et ces réduites donnent

(10) $44^2 - 2005 \cdot 1^2 = -69 \quad 179^2 - 2005 \cdot 4^2 = -39$

(11) $8642^2 - 2005 \cdot 193^2 = -81.$

De plus, nous aurons, en multipliant les deux équations (10),

(12) $48^2 - 2005 \cdot 1^2 = 299.$

Désignons ensuite pour abréger par p_α, p_β, p_γ les trois nombres premiers 3, 13, 23, pris dans un ordre quelconque, nous aurons les résultats suivants:

1° Les trois équations

(13) $$u^2 - a v^2 = (-1)^\vartheta p_\alpha p_\beta, \quad a = 2005,$$

sont non-décomposables et du genre 2.

2° Les trois équations

(14) $$u^2 - a v^2 = \pm p_\alpha^2 p_\beta^2$$

sont non-décomposables et du genre 4.

3° Aucune des trois équations

(15) $$u^2 - a v^2 = (-1)^\vartheta p_\alpha^k$$

n'est résoluble, à moins que l'exposant k ne soit multiple de 4.

4° Les trois équations

(16) $$u^2 - a v^2 = (-1)^{\vartheta+1} p_\alpha^3 p_\beta$$

sont non-décomposables et du genre 2.

Cela posé, l'opération itérative donnera immédiatement les résultats généraux concernant la base $a = 2005$, où m et n désigneront des nombres entiers non négatifs:

1° Les équations

(17) $$u^2 - a v^2 = (-1)^\vartheta p_\alpha^{2m+1} p_\beta^{2n+1}$$

sont non-décomposables et du genre 2.

2° Les équations

$$u^2 - a v^2 = \pm p_\alpha^{4m+2} p_\beta^{4n+2} \tag{18}$$

sont non-décomposables et du genre 4.

3° Les équations

$$u^2 - a v^2 = (-1)^\delta p_\alpha^{4m} p_\beta^{4n} \tag{19}$$

ne sont résolubles, à moins que δ et $m+n$ ne soient de même parité; dans ce cas, les équations (19) sont décomposables et par conséquent du genre 4.

TROISIÈME PARTIE

Propriétés singulières du paramètre 4.

XII. Généralisations des formules de Cayley.

Dans nos recherches précédentes, nous avons plusieurs fois observé que le nombre 4 joue un rôle singulier, dans la théorie des équations de Lagrange. C'est pourquoi nous nous sommes proposé d'étudier plus amplement les équations de la forme

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta}(8k+4), \tag{1}$$

qui ne sont résolubles, à moins que $a = 8\nu + 5$.

Soit tout d'abord, dans l'équation (1), $k = 0$, nous avons à étudier séparément les trois cas suivants:

1° La base a est de première espèce et plus grande que 5.

Dans ce cas, un intervalle quelconque contient précisément un élément de chacune des deux suites coordonnées, formées des solutions de l'équation susdite.

On voit, en effet, que l'équation qui correspond à la plus petite valeur des bases en question, savoir $a = 13$, a cette propriété, et toutes les autres bases sont plus grandes que $16 = 4^2$.

2° $a = 5$. Pour cette valeur spéciale de la base, l'intervalle I_1 ne contient que la seule solution (1, 1).

3° La base a est de seconde espèce.

Dans ce cas, le paramètre -4 n'est jamais applicable, mais a étant au moins égal à 21, un intervalle quelconque contient précisément un élément de chacune des deux suites coordonnées, formées des solutions de l'équation en question.

Cela posé, nous avons tout d'abord à étudier le premier des trois cas susdits lequel correspond à l'équation

$$u^2 - av^2 = \pm 4. \tag{2}$$

Soient

$$\begin{cases} (s_1, t_1), (s_2, t_2), \ldots, (s_n, t_n), \ldots \\ (\sigma_1, \tau_1), (\sigma_2, \tau_2), \ldots,, (\sigma_n, \tau_n), \ldots \end{cases} \tag{3}$$

les deux suites coordonnées appartenant à cette équation, nous avons, en premier lieu, à démontrer la proposition due à Cayley[1]:

I. La solution primitive (s_1, t_1) de l'équation (2) correspond au paramètre -4, savoir

$$s_1^2 - at_1^2 = -4, \tag{4}$$

et nous aurons pour la première solution de l'équation de Fermat correspondante

$$A_1 = \frac{s_1(s_1^2+3)}{2}, \quad B_1 = \frac{t_1(s_1^2+1)}{2}. \tag{5}$$

En effet, il résulte immédiatement, en vertu de (4),

$$(s_1^2 + at_1^2)^2 - a(2s_1t_1)^2 = 16, \tag{6}$$

de sorte que les deux nombres

$$\alpha = s_1^2 + 2, \quad \beta = s_1 t_1 \tag{7}$$

satisfont à l'équation

$$\alpha^2 - a\beta^2 = 4. \tag{8}$$

Multiplions ensuite les équations (4) et (8), nous aurons, en vertu de (7),

[1] Journal de Crelle, t. 53, p. 369—371; 1857.

$$\left(\frac{s_1(s_1^2+3)}{2}\right)^2 - a\left(\frac{t_1(s_1^2+1)}{2}\right)^2 = -1, \tag{9}$$

de sorte que les inégalités

$$\alpha = s_1^2 + 2 = \frac{s_1^2 + a t_1^2}{2} < \frac{A_2}{2}$$

$$\beta = s_1 t_1 < A_1 B_1 = \frac{B_2}{2}$$

donnent immédiatement

$$\frac{s_1^3 + 3 s_1}{2} < \frac{A_3}{8}, \quad \frac{t_1(s_1^2+1)}{2} < \frac{B_3}{8};$$

c'est-à-dire que l'équation (9) correspond à la plus petite solution de l'équation de FERMAT

$$A_m^2 - a B_m^2 = (-1)^m,$$

et les formules (5) sont évidentes.

De plus, on aura, en vertu de (4),

$$\alpha < A_1, \quad \beta < B_1,$$

de sorte que la solution (α, β) n'est autre chose que (σ_1, τ_1), ce qui donnera

$$\sigma_1 = s_1^2 + 2, \quad \tau_1 = s_1 t_1, \tag{10}$$

et l'équation (4), suppléée par celle-ci

$$\sigma_1^2 - a\tau_1^2 = 4, \tag{11}$$

donne immédiatement les formules générales

$$s_n^2 - a t_n^2 = (-1)^n 4, \quad \sigma_n^2 - a\tau_n^2 = (-1)^{n+1} 4. \tag{12}$$

Cela posé, nous avons à démontrer les formules générales

$$s_n s_p + a t_n t_p = 2\sigma_{n+p-1}, \quad s_n t_p + s_p t_n = 2\tau_{n+p-1} \tag{13}$$

$$\sigma_n \sigma_p + a\tau_n \tau_p = 2 s_{n+p}, \quad \sigma_n \tau_p + \sigma_p \tau_n = 2 t_{n+p}, \tag{14}$$

valables, quels que soient les indices n et p.

A cet effet, remarquons que les formules (6) et (10) donnent

$$s_1 s_1 + a t_1 t_1 = 2\sigma_1, \quad s_1 t_1 + t_1 s_1 = 2\tau_1,$$

les formules générales (13) sont une conséquence immédiates des formules récursives de Lagrange.

Quant aux formules (14), il résulte, en vertu de (11),

$$(\sigma_1^2 + a\tau_1^2)^2 - a(2\sigma_1\tau_1)^2 = 16,$$

et les inégalités $\sigma_1 < A_1$ et $\tau_1 < B_1$ donnent évidemment

$$\sigma_1^2 + a\tau_1^2 < A_2, \quad 2\sigma_1\tau_1 < B_2,$$

de sorte qu'il résulte, en vertu de (12),

$$\sigma_1\sigma_1 + a\tau_1\tau_1 = 2s_2, \quad \sigma_1\tau_1 + \tau_1\sigma_1 = 2t_2,$$

et les formules récursives de Lagrange conduiront sans peine aux formules générales (14).

Posons ensuite, dans les formules générales ainsi obtenues, $p = n$, nous aurons la proposition:

II. Les solutions de l'équation (2) satisfont aux conditions:

$$(15) \qquad \begin{cases} \sigma_{2n-1} = s_n^2 - (-1)^n 2, & \tau_{2n-1} = s_n t_n \\ s_{2n} = \sigma_n^2 + (-1)^n 2, & t_{2n} = \sigma_n \tau_n. \end{cases}$$

Appliquons maintenant les formules, fondamentales dans la théorie des suites coordonnées

$$s_n\sigma_p + a t_n \tau_p = 4A_{n+p-1}, \quad s_n\tau_p + t_n\sigma_p = 2B_{n+p-1},$$

puis posons $p = 2n$, respectivement $p = 2n-1$, il résulte, en vertu des formules (15):

III. Supposons résoluble l'équation (2), les solutions de l'équation de Fermat ayant la base a se présentent sous la forme

$$(16) \begin{cases} A_{3n-1} = \dfrac{\sigma_n(\sigma_n^2 + (-1)^n 3)}{2}, & B_{3n-1} = \dfrac{\tau_n(\sigma_n^2 + (-1)^n)}{2} \\ A_{3n-2} = \dfrac{s_n(s_n^2 - (-1)^n 3)}{2}, & B_{3n-2} = \dfrac{t_n(s_n^2 - (-1)^n)}{2}, \end{cases}$$

tandis qu'il n'existe, pour les solutions (A_{3n}, B_{3n}), aucune expression analogue.

Revenons encore une fois aux formules (13), nous aurons, en résolvant par rapport à s_n et t_n ces deux équations, puis remplaçant n par $n-p+1$,

$$(17)\qquad \begin{cases} s_p\sigma_n - a t_p \tau_n = (-1)^p 2 s_{n-p+1}, \\ s_p\tau_n - t_p\sigma_n = (-1)^p 2 t_{n-p+1}, \end{cases}$$

où il faut supposer bien entendu $n > p$; l'hypothèse $p = n$ donnera les formules curieuses

$$(18)\quad s_n\sigma_n - a t_n\tau_n = (-1)^n 2 s_1, \quad s_n\tau_n - t_n\sigma_n = (-1)^n 2 t_1,$$

valables quel que soit l'indice n.

Le même procédé donnera, en vertu de (14),

$$(19)\quad a t_p\tau_n - s_p\sigma_n = (-1)^n 2\sigma_{p-n}, \quad s_p\tau_n - t_p\sigma_n = (-1)^n 2\tau_{p-n},$$

où il faut supposer $p > n$.

Remarquons, en passant, que les formules (5) permettent de déterminer s_1 et t_1, pourvu que A_1 et B_1 soient connus.

En effet, s_1 est déterminé en extrayant par défaut la racine cubique de $2A_1$, puis la seconde formule (5) donnera immédiatement la valeur de t_1.

Dans l'article XIV, nous avons à revenir à cette question.

XIII. L'équation $u^2 - 5v^2 = \pm 4$.

La base spéciale 5 est d'une forme très singulière, car

$$5 = 2^2 + 1 = 1^2 + 4 = 3^2 - 4,$$

de sorte que 5 est à la fois représentant de trois formes différentes des nombres qui nous occupent ici. De plus, 5 est le seul nombre de la forme $(2\alpha+1)^2 - 4$ qui est une base de première espèce et la seule base de la forme $\alpha^2 + 1$

qui admette le paramètre 4, nous l'avons déjà remarqué dans l'article VI.

Quant à l'équation de LAGRANGE

(1) $$u^2 - 5v^2 = \pm 4$$

elle n'admet, dans l'intervalle I_1, que la seule solution (s_1, t_1), savoir

(2) $$s_1 = 1, \quad t_1 = 1; \quad s_1^2 - 5t_1^2 = -4.$$

Soient ensuite $(\sigma_{n-1}, \tau_{n-1})$ et (s_n, t_n) les deux solutions de l'équation (1) qui appartiennent, pour $n > 1$, à l'intervalle I_n, on aura, quel que soit l'indice n,

(3) $$\sigma_{n-1}^2 - 5\tau_{n-1}^2 = s_n^2 - 5t_n^2 = (-1)^n 4.$$

Mais, avec cette exception, tous les résultats, obtenus dans l'article précédent, sont applicables aussi pour $a = 5$, tandis que cette valeur spéciale de la base a conduira à d'autres propriétés des solutions de l'équation (1).

Nous nous bornerons à citer les formules

(4) $$s_n = A_n - A_{n-1}, \qquad t_n = B_n - B_{n-1}$$

(5) $$\sigma_n = A_{n-1} + A_{n-2}, \quad \tau_n = B_{n-1} + B_{n-2},$$

tirées de (4) et (5) de l'article VII, et

(6) $$s_n = 3A_{n-1} + A_{n-2}, \quad t_n = 3B_{n-1} + B_{n-2}$$

tirée de (7) de l'article VIII; il est évident du reste que (6) est une conséquence immédiate de (4).

Citons encore les fractions continues

(7) $$\frac{\sigma_n}{\tau_n} = (2, 4, 4, \ldots, 4, 1)$$

(8) $$\frac{s_n}{t_n} = (2, 4, 4, \ldots, 4, 3)$$

qui sont les conséquences immédiates des développements (8) et (9) de l'article IX.

XIV. Le paramètre $\omega = 4$.

Soit maintenant $a = 8\nu + 5$ une base de seconde espèce, les équations de Lagrange au paramètre 4 se présentent exclusivement sous la forme

$$u^2 - a v^2 = 4. \tag{1}$$

Remarquons que $a = 21$ est la plus petite des bases susdites, il est évident qu'un intervalle quelconque I_n contient précisément un élément de chacune des suites coordonnées

$$\begin{cases} (s_1, t_1)\ (s_2, t_2)\ \ldots\ (s_n, t_n)\ \ldots \\ (\sigma_1, t_1)\ (\sigma_2, \tau_2)\ \ldots\ (\sigma_n, \tau_n)\ \ldots, \end{cases} \tag{2}$$

formées des solutions de l'équation (1).

Supposons $(s_1, t_1) < (\sigma_1, \tau_1)$, nous aurons des formules parfaitement analogues à celles développées dans l'article XII, de sorte que nous pouvons nous borner à citer les relations

$$\begin{cases} \sigma_{2n-1} = s_n^2 - 2, \quad \tau_{2n-1} = s_n t_n \\ s_{2n} = \sigma_n^2 - 2, \quad t_{2n} = \sigma_n \tau_n \end{cases} \tag{3}$$

et les expressions correspondantes

$$\begin{cases} A_{3n-1} = \dfrac{\sigma_n(\sigma_n^2 - 3)}{2}, \quad B_{3n-1} = \dfrac{\tau_n(\sigma_n^2 - 1)}{2} \\ B_{3n-2} = \dfrac{s_n(s_n^2 - 3)}{2}, \quad B_{3n-2} = \dfrac{t_n(s_n^2 - 1)}{2}. \end{cases} \tag{4}$$

Les formules spéciales

$$A_1 = \frac{s_1^3 - 3 s_1}{2}, \quad B_1 = \frac{t_1(s_1^2 - 1)}{2} \tag{5}$$

permettent de déterminer la valeur de s_1 en extrayant par excès la racine cubique de $2A_1$, puis de tirer la valeur de t_1 à l'aide de la dernière des formules (5).

Cayley[1], en appliquant la Table de Degen[2], a résolu toutes les équations résolubles de la forme

$$u^2 - a v^2 = \pm 4, \quad u^2 - a v^2 = +4, \tag{6}$$

qui correspondent à $a < 1000$.

Quant aux propriétés remarquables des nombres A_m et B_m, exprimées par les formules (4) et par les formules (16) de l'article XII, pourvu que l'équation correspondante (6) soit résoluble, il est intéressant, ce me semble, que ces propriétés sont réciproques.

En effet, prenons pour point de départ l'équation de Fermat

$$A_m^2 - a B_m^2 = (-1)^\varepsilon, \tag{7}$$

nous avons à démontrer la proposition:

I. Supposons que le nombre A_m se présente sous la forme

$$A_m = \frac{u\left(u^2 - (-1)^\varepsilon 3\right)}{2}, \tag{8}$$

où u est un nombre impair, et où $u^2 - (-1)^\varepsilon$ est premier avec la base a, l'équation indéterminée

$$u^2 - a v^2 = (-1)^\varepsilon 4 \tag{9}$$

est résoluble.

On aura, en vertu de (8) et (9),

$$u^2\left(u^2 - (-1)^\varepsilon 3\right)^2 - 4 a B_m^2 = (-1)^\varepsilon 4,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\left(u^2 - (-1)^\varepsilon\right)^2 \left(u^2 - (-1)^\varepsilon 4\right) = 4 a B_m^2. \tag{10}$$

Or, le premier des facteurs qui figurent au premier membre de (10) étant premier avec a, le second de ces facteurs est nécessairement multiple de a, et la forme même de l'équation (10) donnera

[1] Journal de Crelle, t. 53, p. 369—371; 1857.

[2] Canon Pellianus, Copenhague 1817.

$$u^2-(-1)^\varepsilon 4 = a v^2, \tag{11}$$

de sorte qu'il resulte, en vertu de (10)

$$B_m = \frac{(u^2-(-1)^\varepsilon)\, v}{2}, \tag{12}$$

et l'équation (11) n'est autre chose que l'équation dont il s'agit de démontrer la résolubilité.

Soit, dans (8), ε un nombre impair, a est nécessairement une base de première espèce, tandis que nous ne savons dès à présent rien sur la nature de cette base, dans le cas où ε est un nombre pair.

XV. Propriétés des équations résolubles.

Les équations résolubles de la forme

$$u^2 - a v^2 = (-1)^\vartheta 4 \tag{1}$$

que nous venons d'étudier possèdent plusieurs propriétés remarquables, dont nous avons à déduire quelques-unes, dans ce qui suit.

A cet effet, démontrons tout d'abord le lemme fondamental:

I. Supposons résoluble l'équation (1), une équation de la forme

$$u^2 - a v^2 = (-1)^\varepsilon 4\omega \tag{2}$$

est toujours au moins du genre 4.

Remarquons tout d'abord que la base a est nécessairement de la forme $8\nu+5$, il est évident que le nombre ω qui figure comme facteur du paramètre de l'équation (2) est impair. Multiplions donc les deux équations (1) et (2), une des équations ainsi obtenues se présente nécessairement sous la forme

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\vartheta+\varepsilon}\omega,$$

et, cette équation étant résoluble, l'équation (2) est décomposable, elle est par conséquent au moins du genre 4.

Cela posé, nous aurons immédiatement comme corollaire cette autre proposition:

II. Supposons résoluble l'équation (1), où $a > 5$, cette autre équation

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\varepsilon}(a-1), \tag{3}$$

toujours résoluble pour $\varepsilon = 1$, est au moins du genre 4.

Quant aux bases de première espèce, nous avons à démontrer la proposition curieuse:

III. Supposons résoluble l'équation (1), où a est une base de première espèce plus grande que 5, ces deux autres équations

$$u^2 - av^2 = \pm 2A_{2\nu+1}, \quad u^2 - av^2 = \pm\frac{A_{2\nu+1}}{2} \tag{4}$$

sont aussi résolubles, quel que soit l'indice ν, et la première est au moins du genre 4.

A cet effet, désignons par a une base quelconque de première espéce, par ω un paramètre, tel que l'équation

$$u^2 - av^2 = \pm\omega \tag{5}$$

soit résoluble. Désignons ensuite par (s_n, t_n) et (σ_p, τ_p) deux solutions appartenant à chacune des deux suites coordonnées formées des solutions de l'équation (5), choisies telles que

$$n + p = 2\nu + 2,$$

nous aurons

$$s_n^2 - at_n^2 = (-1)^{\delta}\omega, \quad \sigma_p^2 - a\tau_p^2 = (-1)^{\delta+1}\omega, \tag{6}$$

ce qui donnera

$$s_n^2 + \sigma_p^2 - a(t_n^2 + \tau_p^2) = 0. \tag{7}$$

De plus, il résulte, en vertu des formules fondamentales de la théorie des suites coordonnées,

$$2s_n\sigma_p + 2at_p\tau_p = 2\omega A_{2\nu+1}, \tag{8}$$

de sorte que nous aurons, en vertu de (7),

$$(s_n \pm \sigma_p)^2 - a(t_p \mp \tau_p)^2 = 2\omega A_{2\nu+1}, \tag{9}$$

où les signes doubles correspondent.

Cela posé, nous avons à démontrer le lemme fondamental:

IV. Un facteur commun des deux nombres $s_n \pm s_p$ et $t_n \mp t_p$, où les signes doubles correspondent, divise nécessairement 2ω.

Soit, en effet, λ le plus grand commun diviseur des deux nombres susdits, et soit

$$s_n \pm \sigma_p = \lambda K, \quad t_n \mp \tau_p = \lambda L,$$

où K et L sont premiers entre eux, nous aurons, en vertu de la première des équations (6),

$$\lambda^2(K^2 - aL^2) \mp 2\lambda(K\sigma_p + L\tau_p) + \sigma_p^2 - a\tau_p^2 = (-1)^\delta\omega,$$

de sorte que la seconde des équations (6) donnera

$$\lambda^2(K^2 - aL^2) \mp 2\lambda(K\sigma_p + L\tau_p) = (-1)^\delta 2\omega, \tag{10}$$

donc λ est nécessairement diviseur de 2ω.

Soit maintenant

$$\omega = 4,$$

on aura

$$\lambda = 2, \quad \lambda = 4.$$

De plus, il existe, en vertu de (9), un exposant ε_1 tel que

$$\begin{cases} s_n + (-1)^\varepsilon\sigma_p = 4k+2, & t_n - (-1)^\varepsilon\tau_p = 4l+2 \\ s_n - (-1)^\varepsilon\sigma_p = 4k_1, & t_n + (-1)^\varepsilon\tau_p = 4l_1, \end{cases} \tag{11}$$

car les nombres s_n et t_n, σ_p et τ_p sont impairs; donc les équations (4) sont toutes deux résolubles.

On voit qu'il est facile de généraliser en quelque me-

sure la proposition III, en remplaçant l'équation (1) par cette autre

$$u^2 - a v^2 = \pm 2^z, \quad z > 3, \tag{12}$$

ce qui donnera immédiatement:

V. Supposons résoluble l'équation (12), cette autre équation

$$u^2 - a v^2 = \pm 2^{z-1} A_{2\nu+1} \tag{13}$$

est aussi résoluble, quel que soit l'indice ν.

Dans le cas particulier $z = 3$, de sorte qu'il s'agit de l'équation

$$u_1 - a v^2 = \pm 8, \tag{14}$$

nous avons à démontrer deux propositions curieuses, savoir:

VI. Supposons résoluble l'équation (14), puis supposons que A_1 soit multiple de 8, l'équation

$$u^2 - a v^2 = \pm A_{2\nu+1} \tag{15}$$

est aussi résoluble, quel que soit l'indice ν.

En effet, posons

$$A_1 = 2^\varrho K_1, \tag{16}$$

où K_1 est un nombre impair, nous aurons donc $\varrho > 3$.

Appliquons ensuite la formule récursive de Lagrange

$$A_{2\nu+1} = A_1 A_{2\nu} + a B_1 B_{2\nu}, \tag{17}$$

il résulte, quel que soit ν,

$$A_{2\nu+1} = 2^\varrho K_{2\nu+1}, \tag{18}$$

où $K_{2\nu+1}$ est un nombre impair, car $A_{2\nu}$ est impair, tandis que $B_{2\nu}$ est divisible par $2^{\varrho+1}$.

Cela posé, il résulte, en vertu de (13) et (14) que les trois équations

$$u^2 - a v^2 = \pm 2^{\varrho+2} K_{2\nu+1}$$
$$u^2 - a v^2 = \pm 2^{\varrho+2}$$
$$u^2 - a v^2 = \pm 2^\varrho$$

sont résolubles; c'est-à-dire que cette autre équation

$$u^2 - av^2 = \pm K_{2\nu+1} \tag{19}$$

aura la même propriété, d'où il s'ensuit que l'équation (15) est aussi résoluble.

Soit, au contraire, dans (16), $\varrho = 2$, aucune des équations (15) ne peut être résoluble, tandis que (19) aura nécessairement cette propriété, ce qui donnera la seconde des propositions susdites:

VII. Supposons résoluble l'équation (14), puis supposons que A_1 soit de la forme $8\nu+4$, l'équation

$$u^2 - av^2 = \pm \frac{A_{2\nu+1}}{4} \tag{20}$$

est toujours résoluble, quel que soit l'indice ν.

Soit par exemple $a = 41$, on aura

$$A_1 = 32, \quad B_1 = 5,$$
$$s_1 = 7, \quad t_1 = 9: \quad \sigma_1 = 19, \quad \tau_1 = 3,$$

ce qui donnera

$$13^2 - 41 \cdot 1^2 = 128, \quad 3^2 - 41 \cdot 1^2 = -32.$$

Soit, comme second exemple $a = 89$, nous aurons

$$A_1 = 500, \quad B_1 = 53,$$
$$s_1 = 9, \quad t_1 = 1; \quad \sigma_1 = 217, \quad \tau_1 = 23,$$

d'où il résulte

$$113^2 - 89 \cdot 11^2 = 2000, \quad 26^2 - 89 \cdot 3^2 = -125.$$

XVI. Des équations toujours résolubles.

Nous savons que, dans une équation résoluble de la forme

$$u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta 4, \tag{1}$$

la base a est toujours un nombre de la forme $8k+5$, mais nous ne savons rien sur la condition nécessaire et suffisante que a doit satisfaire, pour que l'équation (1) soit ré-

soluble; c'est-à-dire que, à ce point de vue, l'équation susdite est plus compliquée que les deux autres équations indéterminées

(2) $$u^2 - a v^2 = (-1)^{\nu-1} 2, \quad a = 4\nu + 3,$$

(3) $$u^2 - a v^2 = -1.$$

En effet, soit $4\nu+3$ respectivement $4\nu+1$ un nombre premier, nous savons que les équations (2) et (3) sont résolubles, pourvu que nous ayons respectivement

(4) $$a = (4\nu+3)^{2\varkappa+1}, \quad a = (4\nu+1)^{2\lambda+1},$$

où les exposants sont des positifs entiers impairs quelconques.

Quant à l'équation (1), posons

(5) $$a = (8\nu+5)^{2\mu+1},$$

où $8\nu+5$ est un nombre premier, nous ne savons dès à présent rien sur la résolubilité de cette équation; mais nous avons à démontrer, à une autre occasion, que la résolubilité de l'équation (1), qui correspond à la base (5), dépend du nombre pair dans un des développements

(6) $$a = \alpha^2 + \beta^2.$$

Mais, quoi qu'il en soit, il est facile de démontrer la proposition:

I. Il existe une infinité de bases, et de première et de seconde espèce, pour lesquelles l'équation (1) est résoluble.

En effet, posons

(7) $$a = (2\alpha+1)^2 + (-1)^{\varepsilon} 4, \quad u = 2\alpha+1, \quad v = 1,$$

nous aurons, quel que soit le positif entier α,

(8) $$u^2 - a v^2 = (-1)^{\varepsilon+1} 4.$$

Cela posé, il nous semble utile d'étudier plus amplement les deux équations de LAGRANGE qui correspondent

à l'hypothèse susdite, mais ces équations sont si analogues que nous pouvons nous borner à étudier par exemple la seule valeur $\varepsilon = 0$, ce qui donnera

$$a = (2\alpha+1)^2+4 = 4\alpha^2+4\alpha+5. \tag{9}$$

Appliquons les mêmes significations que dans l'article XII, nous aurons ici

$$s_1 = 2\alpha+1, \quad t_1 = 1$$
$$\sigma_1 = (2\alpha+1)^2+2, \quad \tau_1 = 4\alpha+2$$
$$A_1 = \frac{(2\alpha+1)^3+3(2\alpha+1)}{2}, \quad B_1 = \frac{(2\alpha+1)^2+1}{2}.$$

Étudions ensuite l'équation

$$u^2 - a v^2 = \pm(a-1), \tag{10}$$

nous aurons, en multipliant ces deux autres

$$1^2 - a\cdot 1^2 = -(a-1)$$
$$(2\alpha+1)^2 - a\cdot 1^2 = -4,$$

pour u et v, les expressions

$$u = (4\alpha^2+4\alpha+5)\pm(2\alpha+1), \quad v = (2\alpha+1)\pm 1,$$

de sorte que nous aurons, pour α pair,

$$\begin{cases} (2\alpha^2+3\alpha+3)^2 - a(\alpha+1)^2 = 4\alpha^2+4\alpha+4 \\ \left(\alpha^2+\frac{\alpha}{2}+1\right)^2 - a\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2+\alpha+1, \end{cases} \tag{11}$$

tandis qu'il résulte pour α impair

$$\begin{cases} \left(\alpha^2+\frac{3\alpha+3}{2}\right)^2 - a\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2 = \alpha^2+\alpha+1 \\ (2\alpha^2+\alpha+2)^2 - a\alpha^2 = 4\alpha^2+4\alpha+4. \end{cases} \tag{12}$$

Quant aux équations (4) de l'article précédent, nous aurons ici

$$(4\alpha^2+6\alpha+4)^2 - a(2\alpha)^2 = 8A_1,$$
$$(4\alpha^2+2\alpha+2)^2 - a(2\alpha+2)^2 = -8A_1,$$

ce qui donnera pour α pair

$$(13)\quad \begin{cases} \left(\alpha^2+\dfrac{3\alpha}{2}+1\right)^2-a\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2=\dfrac{A_1}{2} \\ (2\alpha^2+\alpha+1)^2-a(\alpha+1)^2=-2A_1, \end{cases}$$

et, pour α impair

$$(14)\quad \begin{cases} (2\alpha+3\alpha+2)^2-a\alpha^2=2A_1 \\ \left(\alpha^2+\dfrac{\alpha+1}{2}\right)^2-a\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)=-\dfrac{A_1}{2}. \end{cases}$$

XVII. Des paramètres $4p^\varrho$.

Dans l'article X, nous avons indiqué une infinité d'équations de Lagrange du genre 2 qui conduiront, par l'opération itérative, à des équations du genre 4. Dans ce qui suit, nous avons à étudier des équations aux paramètres composés, l'opération itérative desquelles conduira toujours à des équations du genre 2.

A cet effet, nous supposons résoluble l'équation

$$(1)\qquad u^2-av^2=(-1)^\delta 4p^\varrho,$$

où p est un nombre premier impair, tandis que cette autre équation

$$(2)\qquad u^2-av^2=(-1)^\varepsilon 4$$

est irrésoluble, quel que soit l'exposant ε, ce qui entraîne que l'équation (1) est toujours du genre 2.

Or, l'équation (1) étant résoluble, toutes les équations des formes

$$(3)\quad u^2-av^2=(-1)^{\delta_1}4p^{(3k\pm1)\varrho},\quad u^2-av^2=(-1)^{\delta_2}p^{3l\varrho},$$

déduites de (1) par l'opération itérative, sont aussi résolubles.

Et, chose curieuse, l'inversion de cette proposition est aussi vraie avec certaines modifications.

En effet, désignons par $\varkappa$ le plus petit exposant pour lequel une équation de la forme

(4) $$u^2 - a v^2 = (-1)^\lambda 4 p^\varkappa$$

soit résoluble, nous disons pour abréger que (4) est l'équation primitive appartenant au nombre premier p, et, cette définition adoptée, nous avons à démontrer la proposition curieuse:

I. Toutes les équations résolubles des deux formes

(5) $$u^2 - a v^2 = (-1)^\lambda 4 p^\sigma, \quad u^2 - a v^2 = (-1)^\mu p^\tau$$

proviennent de l'équation primitive par l'opération itérative, de sorte que l'on aura

(6) $$\sigma = (3r \pm 1)\varkappa, \quad \tau = 3s\varkappa.$$

Étudions par exemple tout d'abord la dernière des équations (5), nous avons à démontrer, en premier lieu, que cette équation n'est jamais résoluble pour $\tau < \varkappa$.

A cet effet, soit $\varkappa$ multiple de τ, savoir $\varkappa = m\tau$, l'opération itérative donnera, en vertu de l'équation (5) susdite, l'équation résoluble

$$u^2 - a v^2 = (-1)^\alpha p^{m\tau} = (-1)^\alpha p^\varkappa,$$

ce qui est impossible, parce que l'équation primitive n'est pas décomposable.

Soit ensuite

(7) $$\varkappa = m\tau + n, \quad 1 < n < \tau < \varkappa,$$

on verra, par l'opération itérative, que l'équation

$$u^2 - a v^2 = (-1)^\beta p^{m\tau}$$

est résoluble, ce qui entraîne, en vertu de (4), que cette autre équation

$$u^2 - a v^2 = (-1)^\gamma 4 p^n$$

est aussi résoluble, bien que $n < \varkappa$; c'est-à-dire que l'hypothèse (7) est inadmissible, de sorte que l'on aura nécessairement

$$\tau > \varkappa.$$

Posons maintenant

$$\tau = cz + b, \quad 0 < b < z \tag{8}$$

nous aurons, en vertu de (4), une des deux équations

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\alpha_1} 4p^{cz}, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\beta_1} p^{cz},$$

ce qui donnera, en vertu de l'équation (5) en question, respectivement

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\alpha_2} 4p^b, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\beta_2} p^b,$$

équations qui sont toutes deux impossibles; c'est-à-dire que τ est nécessairement multiple de z, et, conformément aux propriétés fondamentales de l'opération itérative, τ est aussi multiple de 3.

On voit que la première des équations (5) peut être traitée suivant un procédé analogue au précédent.

Remarquons encore, en passant, qu'une équation résoluble, non-décomposable, de la forme

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\delta} 2p^{\varrho},$$

où p est un nombre premier impair, a des propriétés analogues à celles de l'équation (1).

QUATRIÈME PARTIE

D'autres équations de formes spéciales.

XVIII. Le paramètre $\omega = a-1$.

Dans nos recherches précédentes, nous avons mis en pleine lumière l'insuffisance de la règle, rapportée sans critique par feu M. Lampe[1], pour la formation des solutions de l'équation de Lagrange

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta}(a-1). \tag{1}$$

Néanmoins, il nous semble utile d'étudier un peu plus amplement les suites coordonnées de l'équation (1) qui correspondent à la solution évidente

$$u = 1, \quad v = 1. \tag{2}$$

A cet effet, multiplions l'équation susdite et l'équation générale de Fermat, ayant la base a,

$$A_n^2 - a B_n^2 = (-1)^{n\varepsilon}, \tag{3}$$

nous aurons

$$(A_n \pm a B_n)^2 - a(A_n \pm B_n)^2 = (-1)^{n\varepsilon}(1-a), \tag{4}$$

ce qui nous conduira à étudier les deux solutions

$$\begin{cases} (A_n + a B_n, & A_n + B_n) \\ (|A_n - a B_n|, & |A_n - B_n|) \end{cases} \tag{5}$$

ainsi obtenues, et nous avons tout d'abord à démontrer les deux lemmes suivants:

[1] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 32, p. 197; 1901.

I. Soit $a > 5$ une base, quelconque du reste, nous aurons toujours

(6) $$A_n > 2B_n,$$

inégalité qui est vraie aussi pour $a = 5$, $n > 1$.

En effet, remarquons que l'équation quadratique

(7) $$f(x) \equiv x^2 - aB_n^2 - (-1)^{nk} = 0$$

a les deux racines $x = \pm A_n$, et que nous aurons

$$f(2B_n) = (4-a)B_n^2 - (-1)^{nk} < 0,$$

pourvu que $a > 5$ ou $a = 5$, $n > 1$, l'inégalité (6) est évidente. Quant à l'hypothèse $a = 5$, $n = 1$, elle donnera

$$A_1 = 2B_1.$$

Démontrons maintenant le second des lemmes susdits.

II. Soit a une base plus grande que 3, mais quelconque du reste, nous aurons toujours, quel que soit l'indice n,

(8) $$aB_n > 2A_n.$$

Appliquons les inégalités évidentes

$$B_n < A_n - B_n < A_n + B_n < B_1A_n + A_1B_n = B_{n+1},$$

nous aurons de même, en vertu de (4),

$$A_n < |aB_n - A_n| < A_{n+1},$$

de sorte que $aB_n - A_n$ est certainement positif, ce qui donnera

$$aB_n > 2A_n,$$

et l'inégalité (8) est évidente. On voit du reste que cette inégalité est aussi applicable pour $a = 5$, $n = 1$.

Quant aux deux cas exclus

$$a = 2, \quad a = 3,$$

je dis que nous aurons, pour $n > 1$,

$$\frac{a}{2}B_n < A_n < 2B_n, \tag{9}$$

tandis que l'hypothèse $n = 1$ donnera

$$A_1(2) = B_1(2) = 1, \quad A_1(3) = 2B_1(3) = 2. \tag{10}$$

En effet, soit $a = 2$ ou $a = 3$ et $n > 1$, on aura, en vertu de (7),

$$f(2B_n) > 0,$$

tandis que l'hypothèse $a = 3$, $n = 1$ donnera

$$f(2B) = 0,$$

de sorte que nous aurons, le cas particulier susdit exclu, $A_n < 2B_n$.

Soit ensuite $a = 2$, la seconde des inégalités est évidente, pourvu que $n > 1$, tandis que l'hypothèse $a = 3$ donne la formule récursive

$$2A_n - 3B_n = A_{n-1},$$

de sorte que $2A_n > 3B_n$.

Cela posé, nous avons démontré la proposition, curieuse en comparaison avec la règle insuffisante susdite:

II. Soit $a \geq 5$, l'équation (1) admet toujours, dans l'intervalle I_{n-1}, où $n > 1$, les deux solutions

$$(aB_n + A_n,\ A_n + B_n),\quad (aB_n - A_n,\ A_n - B_n), \tag{11}$$

tandis que l'intervalle I_1 ne contient que la solution évidente (1, 1).

Quant à la valeur exclue $a = 3$, l'équation (1) n'est que du genre 1; c'est-à-dire que l'ensemble de ses solutions forme une suite fermée, et, dans ce cas, la règle fameuse donne toutes les solutions de l'équation susdite.

XIX. Les paramètres $\omega = a + 1$, $\omega = a \pm 2$.

Dans nos recherches précédentes, nous avons souvent appliqué les solutions de l'équation

(1) $$A_n^2 - 2B_n^2 = (-1)^n;$$

il nous reste encore de démontrer, à l'aide de ces nombres, la résolubilité de certaines équations de LAGRANGE de formes singulières. Et, à cet effet, nous avons à démontrer les propositions suivantes:

I. L'équation indéterminée

(2) $$u^2 - av^2 = a+1$$

est toujours résoluble pour les bases de seconde espèce

(3) $$a = 2\alpha(\alpha+1),$$

où $2\alpha+1$ ne doit être égal à aucun des nombres $A_{2\nu}$.

On voit immédiatement que l'équation (2) est, pour la valeur susdite de a, satisfaite par

(4) $$u = 2\alpha+1, \quad v = 1,$$

de sorte qu'il ne s'agit que de déterminer le nombre α, de sorte que a ne devienne pas un carré exact, savoir

$$2\alpha(\alpha+1) = \beta^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(2\alpha+1)^2 - 2\beta^2 = 1,$$

ce qui donnera

(5) $$2\alpha+1 = A_{2\nu}, \quad \beta = B_{2\nu}.$$

On voit que $\alpha = 1$ donnera l'équation

$$u^2 - 12v = 13,$$

satisfaite par $u = 5$, $v = 1$, tandis que l'hypothèse $\alpha = 4$ conduira à l'équation

$$u^2 - 40v^2 = 41$$

ayant la plus petite solution $u = 9$, $v = 1$.

II. L'équation indéterminée

(6) $$u^2 - av^2 = a+2$$

est toujours résoluble pour les bases

$$a = 2\alpha^2 - 1, \tag{7}$$

où α ne doit être égal à aucun des nombres $B_{2\nu+1}$.

On voit immédiatement que l'équation (6) est, pour la valeur susdite de a, satisfaite par

$$u = 2\alpha, \quad v = 1, \tag{8}$$

et il est évident que l'hypothèse

$$2\alpha^2 - 1 = \beta^2$$

donnera

$$\beta = A_{2\nu+1}, \quad \alpha = A_{2\nu+1}, \tag{9}$$

de sorte que ces valeurs de α ne sont pas admissibles.

Remarquons qu'une infinité de nombres (7) sont des bases de première espèce, ce qui a par exemple certainement lieu, pourvu que

$$2\alpha^2 - 1 = 4\beta^2 + 1,$$

ce qui donnera

$$\alpha = A_{2\nu}, \quad \beta = B_{2\nu}. \tag{10}$$

Soit, par exemple $\alpha = 3$, on aura l'équation

$$u^2 - 17v^2 = \pm 19,$$

satisfaite par $u = 6$, $v = 1$.

Il est bien curieux, ce me semble, qu'il existe aussi une infinité de bases de seconde espèce qui sont de la forme (7), ce qui a par exemple certainement lieu, pourvu que

$$2\alpha^2 - 1 = \beta^2 - 2,$$

savoir

$$\alpha = B_{2\nu}, \quad \beta = A_{2\nu}. \tag{11}$$

On voit que, pour ces valeurs de α, le second nombre de l'équation (6) est toujours un carré exact, savoir

$$2B_{2\nu}^2 + 1 = A_{2\nu}^2.$$

Soit par exemple $\alpha = B_2 = 2$, on aura l'équation

$$u^2 - 7v^2 = 9,$$

satisfaite par $u = 4$, $v = 1$.

III. L'équation indéterminée

(12) $$u^2 - av^2 = a - 2$$

est toujours résoluble pour les bases

(13) $$a = 2\alpha^2 + 1,$$

où α ne doit être égal à aucun des nombres $B_{2\nu}$.

Il est évident que l'équation (12) est, pour la valeur susdite de a, satisfaite par

(14) $$u = 2\alpha, \quad v = 1,$$

et l'hypothèse

$$2\alpha^2 + 1 = \beta^2$$

donnera

(15) $$\alpha = B_{2\nu}, \quad \beta = A_{2\nu},$$

de sorte que ces valeurs de α sont exclues.

Quant à la base (13), on aura

(16) $$2\alpha^2 + 1 = \beta^2 + 9,$$

pourvu que

$$\alpha = 2A_{2\nu}, \quad \beta = 4B_{2\nu},$$

mais j'ignore s'il existe une infinité de bases de première espèce de la forme

$$16B_{2\nu}^2 + 9.$$

On voit, au contraire, que la base (13) est certainement de seconde espèce, pourvu que

(17) $$2\alpha^2 + 1 = \beta^2 + 2,$$

ce qui donnera

(18) $$\beta = A_{2\nu+1}, \quad \alpha = B_{2\nu+1}.$$

Soit par exemple $\alpha = 6$, on aura l'équation

$$u^2 - 73v^2 = \pm 71$$

qui est satisfaite par $u = 12$, $v = 1$, tandis que l'hypothèse $\alpha = 3$ donnera

$$u^2 - 19\,v^2 = 17$$

ayant la solution $u = 6$, $v = 1$.

XX. La base $a = \alpha^2 - 1$.

Étudions maintenant les équations de Fermat et de Lagrange qui correspondent à la base

$$a = \alpha^2 - 1\,,$$

où α est un nombre entier, plus grand que l'unité.

A cet effet, revenons aux polynomes $\varphi_n(\alpha)$ et $\psi_n(\alpha)$ définis dans l'article VI, puis posons

$$f_n(\alpha) = i^{-n}\varphi_n(i\alpha)\,, \quad g_n(\alpha) = i^{1-n}\psi_{n-1}(i\alpha)\,,$$

nous aurons pour $n \geq 2$

$$(1)\quad \begin{cases} f_n(\alpha) = 2^{n-1}\alpha^n + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \frac{n}{2s}\binom{n-s-1}{s-1}(2\alpha)^{n-2s} \\ g_n(\alpha) = \sum_{s=0}^{< \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n-s-1}{s}(2\alpha)^{n-2s-1} \end{cases}$$

et particulièrement pour $n = 1$

$$(1\text{ bis})\qquad f_1(\alpha) = \alpha\,, \quad g_1(\alpha) = 1\,,$$

ce qui donnera, pour les solutions de l'équation de Fermat

$$(2)\qquad A_n^2 - (\alpha^2 - 1)\,B_n^2 = 1\,,$$

l'expression générale

$$(3)\qquad A_n = f_n(\alpha)\,, \quad B_n = g_n(\alpha).$$

Cela posé, désignons par

$$(4)\qquad (s_1,\ t_1),\ (s_2,\ t_2),\ \ldots,\ (s_n,\ t_n),\ \ldots.$$

une suite de solutions ou de l'équation (2) ou de l'équation de Lagrange correspondante

$$u^2-(\alpha^2-1)\,v^2=(-1)^\delta\omega\,, \tag{5}$$

nous avons à démontrer les deux propositions suivantes:

I. Les éléments de la suite (4) satisfont aux formules récursives

$$\begin{cases} s_n=\alpha t_n-t_{n-1} \\ t_n=\alpha t_{n-1}+s_{n-1}. \end{cases} \tag{6}$$

En effet, la dernière de ces deux formules n'est autre chose que la formule récursive de Lagrange, tandis que la première des formules susdites est une conséquence immédiate de cette autre formule récursive

$$s_n=\alpha s_{n-1}+(\alpha^2-1)\,t_{n-1}. \tag{7}$$

Appliquons ensuite les formules (6), nous aurons immédiatement la seconde des propositions susdites:

II. Les éléments de la suite (4) satisfont à la condition

$$\begin{cases} \dfrac{s_n-s_{n-1}}{\alpha-1}=t_n+t_{n-1} \\ \dfrac{s_n+s_{n-1}}{\alpha+1}=t_n-t_{n-1}. \end{cases} \tag{8}$$

Quant à l'équation de Lagrange, remarquons tout d'abord que l'équation spéciale

$$u^2-(\alpha^2-1)\,v^2=r^2+s^2-2rs\alpha \tag{9}$$

admet les solutions réciproques

$$(\alpha r-s,\ r),\quad (\alpha s-r,\ s), \tag{9 bis}$$

il est évident que cette autre équation spéciale

$$u^2-(\alpha^2-1)\,v^2=2rs\alpha+r^2+s^2 \tag{10}$$

a les solutions réciproques

$$(\alpha r+s,\ r),\quad (\alpha s+r,\ s), \tag{10 bis}$$

tandis que les solutions générales de ces équations deviennent respectivement

$$(11)\quad \begin{cases} (rf_n(\alpha)-sf_{n-1}(\alpha),\ rg_n(\alpha)-sg_{n-1}(\alpha)), \\ (sf_n(\alpha)-rf_{n-1}(\alpha),\ sg_n(\alpha)-rg_{n-1}(\alpha)), \\ (rf_n(\alpha)+sf_{n-1}(\alpha),\ rg_n(\alpha)+sg_{n-1}(\alpha)), \\ (sf_n(\alpha)+rf_{n-1}(\alpha),\ sg_n(\alpha)+rg_{n-1}(\alpha)), \end{cases}$$

Or, dans les formules (9) et (10), il faut supposer inégaux les deux positifs entiers r et s, car l'hypothèse $r = s$ conduira, après une légère modification, aux équations irrésolubles

$$(12)\quad \begin{cases} u^2-(\alpha^2-1)\,v^2 = 2-2\alpha \\ u^2-(\alpha^2-1)\,v^2 = 2\alpha+2, \end{cases}$$

équations que nous avons à étudier plus amplement, dans l'article qui suit.

Revenons maintenant à l'équation générale (5), nous avons à démontrer la proposition fondamentale:

III. L'équation de Lagrange

$$u^2-(\alpha^2-1)\,v^2 = (-1)^{\vartheta}\omega$$

est toujours irrésoluble, pourvu que $\omega \leqq 2\alpha-2$.

En effet, étudions tout d'abord les équations susdites qui admettent, dans l'intervalle I_1, une solution (u, v), nous aurons

$$u = \alpha-s,\quad v = 1,$$

ce qui donnera, en vertu de (9),

$$\omega = 2s\alpha-s^2-1 \geqq 2\alpha-2.$$

Supposons ensuite qu'il n'existe aucune solution située dans l'intervalle I_1, puis désignons par (u, v) et (u_1, v_1) deux solutions réciproques, nous aurons donc

$$u > \alpha,\quad v \geqq 1;\quad u_1 \geqq \alpha,\quad v_1 \geqq 1,$$

où les signes d'égalité ne sont pas simultanés, ce qui donnera, en vertu de la propriété fondamentale des solutions réciproques,

$$\omega = u v_1 + u_1 v \geq 2\alpha,$$

et nous savons dès à présent que le paramètre $\omega = 2\alpha - 2$ n'est pas admissible.

XXI. Sur l'équation $(\alpha+1)u^2-(\alpha-1)v^2 = 2$.

Il nous reste encore d'étudier plus amplement les deux équations irrésolubles (12) de l'article précédent, savoir

$$u^2-(\alpha^2-1)v^2 = 2-2\alpha \tag{1}$$

et l'équation obtenue de celle-ci, en changeant le signe de α.

A cet effet, posons, conformément aux formules (8) de l'article précédent,

$$\begin{cases} \varkappa_n(\alpha) = \dfrac{f_n(\alpha)+f_{n-1}(\alpha)}{\alpha+1} = g_n(\alpha)-g_{n-1}(\alpha) \\ \lambda_n(\alpha) = \dfrac{f_n(\alpha)-f_{n-1}(\alpha)}{\alpha-1} = g_n(\alpha)+g_{n-1}(\alpha), \end{cases} \tag{2}$$

ces polynomes entiers sont tous deux du degré $n-1$ par rapport à α, et nous aurons immédiatement la proposition:

I. L'identité algébrique

$$(\alpha+1)u^2-(\alpha-1)v^2 = 2 \tag{3}$$

admet comme solution générale, en polynomes entiers,

$$u = \varkappa_n(\alpha), \quad v = \lambda_n(\alpha),$$

de sorte que l'on aura, quel que soit l'indice n,

$$(\alpha+1)\varkappa_n^2(\alpha)-(\alpha-1)\lambda_n^2(\alpha) = 2. \tag{4}$$

Quant à ces polynomes curieux $\varkappa_n(\alpha)$ et $\lambda_n(\alpha)$, les premiers deviennent

$$(1, 1),\ (2\alpha-1,\ 2\alpha+1),\ (4\alpha^2-2\alpha-1,\ 4\alpha^2+2\alpha-1),$$

tandis que les définitions (2) donnent immédiatement

$$\varkappa_n(\alpha) = (-1)^{n-1}\lambda_n(-\alpha), \tag{5}$$

et il résulte, en vertu de la formule (7) de l'article précédent,

$$(6)\quad \begin{cases} \varkappa_n(\alpha) = f_{n-1}(\alpha) + (\alpha-1)\, g_{n-1}(\alpha) \\ \lambda_n(\alpha) = f_{n-1}(\alpha) + (\alpha+1)\, g_{n-1}(\alpha), \end{cases}$$

de sorte que nous aurons les identités

$$(7)\quad \begin{cases} \lambda_n(\alpha) + \varkappa_n(\alpha) = 2 g_n(\alpha) \\ \lambda_n(\alpha) - \varkappa_n(\alpha) = 2 g_{n-1}(\alpha) \\ (\alpha+1)\,\varkappa_n(\alpha) - (\alpha-1)\,\lambda_n(\alpha) = 2 f_{n-1}(\alpha), \end{cases}$$

dont la dernière, combinée avec (4), donnera

$$(8)\quad \begin{cases} (\alpha+1)\,\varkappa_n(\alpha)\, g_{n-1}(\alpha) = \lambda_n(\alpha)\, f_{n-1}(\alpha) - 1 \\ (\alpha-1)\,\lambda_n(\alpha)\, g_{n-1}(\alpha) = \varkappa_n(\alpha)\, f_{n-1}(\alpha) + 1. \end{cases}$$

De plus, il résulte, en vertu de (18),

$$\lambda_n(\alpha) - \varkappa_n(\alpha) = \lambda_{n-1}(\alpha) + \varkappa_{n-1}(\alpha) = \lambda_{n-1}(\alpha) - \varkappa_{n-1}(\alpha) + 2\varkappa_{n-1}(\alpha),$$

ce qui donnera la formule curieuse

$$(9)\quad \lambda_n(\alpha) = \varkappa_n(\alpha) + 2\left(\varkappa_{n-1}(\alpha) + \varkappa_{n-2}(\alpha) + \ldots + \varkappa_1(\alpha)\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(10)\qquad g_n(\alpha) = \varkappa_n(\alpha) + \varkappa_{n-1}(\alpha) + \ldots + \varkappa_1(\alpha),$$

de sorte que nous aurons, en changeant le signe de α, puis appliquant l'identité (5),

$$(11)\qquad g_n(\alpha) = \lambda_n(\alpha) - \lambda_{n-1}(\alpha) + \ldots + (-1)^{n-1}\lambda_1(\alpha).$$

Revenons maintenant à l'équation irrésoluble (1), nous aurons

$$\left(u^2 + (\alpha^2-1)\, v^2\right)^2 - (\alpha^2-1)\,(2uv)^2 = 4(\alpha-1)^2,$$

de sorte que les formules

$$u = (\alpha-1)\,\lambda_n(\alpha), \quad v = \varkappa_n(\alpha)$$

donnent, en vertu de (4),

$$(12)\quad \begin{cases} f_{2n-1}(\alpha) = (\alpha-1)\,\lambda_n^2(\alpha) + 1 = (\alpha+1)\,\varkappa_n^2(\alpha) - 1 \\ g_{2n-1}(\alpha) = \varkappa_n(\alpha)\,\lambda_n(\alpha), \end{cases}$$

formules qui sont analogues aux formules de LAGRANGE

$$f_{2n}(\alpha) = 2f_n^2(\alpha) - 1, \quad g_{2n}(\alpha) = 2f_n(\alpha)\, g_n(\alpha).$$

Or, remarquons les identités

$$f_n(\cos x) = \cos nx, \quad g_n(\cos x) = \frac{\sin nx}{\sin x},$$

il est évident que les identités algébriques que nous venons de développer ne sont autre chose que des formules trigonométriques élémentaires.

Cela posé, nous avons à étudier l'équation indéterminée, obtenue de l'identité algébrique (4), en supposant que α soit un positif entier quelconque, ce qui nous conduira tout d'abord à démontrer la proposition:

II. Soit α un positif entier quelconque, l'équation indéterminée

$$(2\alpha+1)\, u^2 - (2\alpha-1)\, v^2 = 2 \tag{13}$$

admet, comme solution générale,

$$u = \varkappa_n(2\alpha), \quad v = \lambda_n(2\alpha). \tag{14}$$

En effet, il est évident que ces nombres satisfont à l'équation susdite, de sorte qu'il nous ne reste que de démontrer que l'équation (13) n'admet pas d'autres solutions.

Or, soit (u, v) une solution quelconque de (13), les nombres

$$s = (2\alpha+1)\, u, \quad t = v$$

satisfont évidemment à l'équation

$$s^2 - (4\alpha^2-1)\, t^2 = 2(2\alpha+1),$$

ce qui donnera

$$\left(s^2 + (4\alpha^2-1)\, t^2\right)^2 - (4\alpha^2-1)\,(2st)^2 = 4(2\alpha+1)^2,$$

de sorte qu'il existe un indice m, tel que

$$A_m = (2\alpha-1)\, v^2 + 1 = (2\alpha+1)\, u^2 - 1$$
$$B_m = uv,$$

et, je dis que, dans ces formules, l'indice m est nécessairement impair.

Soit, en effet, m un nombre pair, savoir $m = 2r$, on aura

$$(2\alpha+1)\,u^2 = 2A_r^2,$$

ce qui est inadmissible.

Posons donc $m = 2r+1$, il résulte, en vertu de (12),

$$u = \varkappa_r(2\alpha), \quad v = \lambda_r(2\alpha).$$

Cela posé, nous aurons de même cette autre proposition:

III. Soit α un positif entier quelconque, l'équation indéterminée

(15) $$(\alpha+1)\,u^2 - \alpha v^2 = 1$$

admet, comme solution générale,

(16) $$u = \varkappa_n(2\alpha+1), \quad v = \lambda_n(2\alpha+1).$$

Soit, dans l'équation (15), α un carré exact, nous retrouvons l'équation de Fermat, étudiée dans l'article VI; posons ensuite α^2 au lieu de α, puis tenons compte des degrés des polynomes en question, nous aurons

(17) $$\alpha\lambda_n(2\alpha^2+1) = \varphi_{2n-1}(\alpha), \quad \varkappa_n(2\alpha^2+1) = \psi_{2n-1}(\alpha).$$

Soit, au contraire, dans (15), $\alpha+1$ un carré exact, on aura de même

(18) $$\alpha\varkappa_n(2\alpha^2-1) = f_{2n-1}(\alpha), \quad \lambda_n(2\alpha^2-1) = g_{2n-1}(\alpha).$$

On voit que l'équation (13) conduira à des résultats analogues concernant les équations de Lagrange

(19) $$u^2 - (\sigma^2 \pm 2)\,v^2 = \mp 2,$$

où les signes correspondent, pourvu que $2\alpha \pm 1$ soit un carré exact.

En effet, posons $\sigma = \alpha\sqrt{2}$, nous aurons, pour les signes supérieurs

(20) $$u_n = \sqrt{2}\,\varphi_{2n-1}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \quad v_n = \psi_{2n-1}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right),$$

tandis qu'il résulte, pour les signes inférieurs, les formules analogues

$$u_n = \sqrt{2}\, f_{2n-1}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right), \quad v_n = g_{2n-1}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right). \tag{21}$$

XXII. Sur les bases régulières.

En terminant cette étude sur les équations de Lagrange, nous avons à revenir à la base

$$15130 = 5(55^2+1) = 123^2+1,$$

mentionnée dans l'article XI.

A cet effet, démontrons tout d'abord le théorème curieux:

I. Désignons par a une base régulière, puis supposons résoluble l'équation de Lagrange

$$u^2 - a v^2 = a - (-1)^\delta \omega, \tag{1}$$

cette autre équation indéterminée

$$a(a^2 y^2 + 1) = x^2 + (-1)^\delta \omega \tag{2}$$

est aussi résoluble et admet une infinité de solutions.

En effet, il est évident que l'équation (2) se présente sous la forme

$$x^2 - a(ay)^2 = a - (-1)^\delta \omega, \tag{3}$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (1), dans laquelle les nombres v sont multiples de a.

Or, soit

$$(u_1, v_1)\ (u_2, v_2) \ldots . (u_n, v_n) \ldots . \tag{4}$$

une suite quelconque formée des solutions de l'équation (1), nous savons que le diviseur a appartient à cette suite; c'est-à-dire qu'une infinité des nombres v_n est multiple de a.

Soit ensuite v_μ le premier des v_n qui soit multiple de a, les nombres

$$x = u_{\mu+ak}, \quad y = v_{\mu+ak}, \tag{5}$$

où k est un entier non négatif, mais quelconque du reste, représentent l'ensemble des valeurs de x et de y tirées de la suite (4).

Cela posé, on aura immédiatement, comme corollaire du théorème I, cet autre:

II. Soit a une base régulière qui admet le paramètre $a-1$, il existe une infinité de bases de première espèce parmi les nombres

$$a(a^2k^2+1). \tag{6}$$

ou k est un positif entier.

A cet effet, nous avons à résoudre l'équation indéterminée

$$a(a^2y^2+1) = x^2+1, \tag{7}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$x^2 - a(ay)^2 = a-1, \tag{8}$$

et cette équation est résoluble, parce que a est une base régulière, et l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = a-1 \tag{9}$$

est supposée résoluble.

On voit, en vertu de (9), que la base a est toujours la somme de deux carrés premiers entre eux.

Soit donc a une base de première espèce, les équations (7) et (9) admettent le même nombre de couples des suites coordonnées,

Soit, au contraire, a une base de seconde espèce, les solutions de l'équation

$$u^2 - av^2 = 1-a,$$

toujours résoluble, ne donnent aucune solution de l'équation (7).

Exemple I. Soit $a = 5$, nous aurons, en vertu de (8), à résoudre l'équation

(10) $$x^2 - 125\,y^2 = 4.$$

Soit donc (u_n, v_n) et (u_n', v_n') les éléments généraux des deux suites coordonnées formées des solutions de l'équation de LAGRANGE

$$u^2 - 125\,v^2 = \pm 4,$$

de sorte que (u_1, v_1) est la solution primitive (11, 1), la solution complète de l'équation (10), ou, ce qui est la même chose, de l'équation

(11) $$5\,(25\,y^2 + 1) = x^2 + 1,$$

est formée des couples

$$x_n = u_{2n}, \qquad y_n = v_{2n}$$
$$x_n' = u_{2n-1}, \qquad y_n' = v_{2n-1},$$

de sorte que nous aurons

$$x_1' = 123, \quad y_1' = 1,$$

valeurs qui conduiront à la base 15130.

Exemple II. Soit $a = 221$, cette base de seconde espèce est régulière, parce que l'on aura

$$A_1 = 1665, \quad B_1 = 112.$$

De plus, l'équation

(12) $$u^2 - 221\,v^2 = 220$$

admet deux couples de suites coordonnées, dont les éléments primitifs sont

$$(21, 1), \quad (47, 3).$$

Désignons ensuite par (s_n, t_n) et (s_n', t_n'), (σ_n, τ_n) et (σ_n', τ_n') les éléments généraux des deux couples de suites en question, la solution complète de l'équation indéterminée

(13) $$221\,(221^2\,y^2 + 1) = x^2 + 1$$

est formée par les deux couples de suites coordonnées

$$(s_{\varkappa + 221k}, \; t_{\varkappa + 221k}) \quad (s'_{\lambda + 221l}, \; t'_{\lambda + 221l})$$
$$(\sigma_{\mu + 221m}, \; \tau_{\mu + 221m}) \quad (\sigma'_{\nu + 221n}, \; \tau'_{\nu + 221n}),$$

où $t_\varkappa$ et t'_λ, τ_μ et τ'_ν sont les premiers des nombres t_n et t'_n, τ_n et τ'_n qui soient multiples de 221.

Quant à la base 5, nous avons encore à résoudre l'équation indéterminée

$$5(25y^2+1) = x^2+4, \tag{14}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$x^2-125y^2 = 1, \tag{15}$$

de sorte que nous aurons généralement

$$x_k = A_{2k}, \quad y_k = B_{2k}, \tag{16}$$

où nous avons posé, quel que soit l'indice m,

$$A_m^2-125B_m^2 = (-1)^m. \tag{17}$$

Cela posé, les bases de première espèce définies par l'équation (14), se présentent sous la forme

$$a_k = 5(25B_{2k}^2+1) = A_{2k}^2+4, \tag{18}$$

et nous aurons

$$A_2 = 930249, \quad B_2 = 83204.$$

TABLES NUMÉRIQUES

concernant les sommes de deux carrés, inférieures à 1500.

Table I.

Les 243 bases de première espèce.

2	5	10	13	17	26	29	37	41
50	53	58	61	65	73	74	82	85
89	97	101	106	109	113	122	125	130
137	145	149	157	170	173	181	185	193
197	202	218	226	229	233	241	250	257
265	269	274	277	281	290	293	298	313
314	317	325	337	338	346	349	353	362
365	370	373	389	394	397	401	409	421
425	433	442	445	449	457	458	461	481
485	493	509	521	530	533	538	541	554
557	565	577	586	593	601	610	613	617
626	629	634	641	653	661	673	677	685
697	701	709	730	733	746	754	757	761
769	773	778	785	794	797	809	818	821
829	842	845	853	857	865	877	881	901
914	922	925	929	937	941	949	953	962
965	970	977	985	986	997	1009	1010	1013
1018	1021	1025	1033	1037	1042	1049	1061	1066
1069	1073	1082	1090	1093	1097	1105	1109	1114
1117	1129	1130	1138	1153	1157	1165	1181	1189
1193	1201	1213	1217	1226	1229	1237	1241	1249
1250	1258	1261	1277	1285	1289	1297	1301	1306

1313 1322 1325 1354 1361 1370 1373 1378 1381
1385 1402 1409 1417 1418 1429 1433 1445 1450
1453 1465 1466 1481 1489 1490 1493

Table II.

Les 44 couples de nombres $4a+1$ et $4a+5$ étant tous deux des bases de première espèce.

13, 17	37, 41	61, 65	85, 89	97, 101
109, 113	145, 149	181, 185	193, 197	229, 233
265, 269	277, 281	313, 317	349, 353	397, 401
421, 425	445, 449	457, 461	481, 485	613, 617
673, 677	697, 701	757, 761	769, 773	853, 857
877, 881	925, 929	937, 941	949, 953	1009, 1013
1021, 1025	1033, 1037	1069, 1073	1093, 1097	1105, 1109
1153, 1157	1189, 1193	1213, 1217	1237, 1241	1285, 1289
1297, 1301	1381, 1385	1429, 1433	1489, 1493	

Table III.

Les 41 bases de seconde espèce et leurs décompositions.

34 146 178 194 205 221 305 377 386
410 466 482 505 514 545 562 578 650
674 689 706 725 745 793 802 850 866
890 898 905 1154 1186 1202 1205 1234 1282
1345 1346 1394 1405 1469.

$$34 = 2\cdot 17 = 5^2+3^2$$
$$146 = 2\cdot 73 = 11^2+5^2$$
$$178 = 2\cdot 89 = 13^2+3^2$$
$$194 = 2\cdot 97 = 13^2+5^2$$
$$205 = 5\cdot 41 = 14^2+3^2 = 13^2+6^2$$
$$221 = 13\cdot 17 = 14^2+5^2 = 11^2+10^2$$
$$305 = 5\cdot 61 = 17^2+4^2 = 16^2+7^2$$
$$377 = 13\cdot 29 = 19^2+4^2 = 16^2+11^2$$
$$386 = 2\cdot 193 = 19^2+5^2$$

$$
\begin{aligned}
410 &= 2\cdot 5\cdot 41 = 19^2+7^2 = 17^2+11^2\\
466 &= 2\cdot 233 = 21^2+5^2\\
482 &= 2\cdot 241 = 19^2+11^2\\
505 &= 5\cdot 101 = 21^2+8^2 = 19^2+12^2\\
514 &= 2\cdot 257 = 17^2+15^2\\
545 &= 5\cdot 109 = 23^2+4^2 = 17^2+16^2\\
562 &= 2\cdot 281 = 21^2+11^2\\
578 &= 2\cdot 289 = 23^2+7^2\\
650 &= 2\cdot 13\cdot 25 = 23^2+11^2 = 19^2+17^2\\
674 &= 2\cdot 237 = 25^2+7^2\\
689 &= 13\cdot 53 = 25^2+8^2 = 20^2+17^2\\
706 &= 2\cdot 353 = 25^2+9^2\\
725 &= 25\cdot 29 = 26^2+7^2 = 23^2+14^2\\
745 &= 5\cdot 149 = 27^2+4^2 = 24^2+13^2\\
793 &= 13\cdot 61 = 28^2+3^2 = 27^2+8^2\\
802 &= 2\cdot 401 = 21^2+19^2\\
850 &= 17\cdot 50 = 29^2+3^2 = 27^2+11^2\\
866 &= 2\cdot 433 = 29^2+5^2\\
890 &= 2\cdot 5\cdot 89 = 29^2+7^2 = 23^2+19^2\\
898 &= 2\cdot 449 = 27^2+13^2\\
905 &= 5\cdot 181 = 29^2+8^2 = 28^2+11^2\\
1154 &= 2\cdot 577 = 25^2+23^2\\
1186 &= 2\cdot 593 = 31^2+15^2\\
1202 &= 2\cdot 601 = 29^2+19^2\\
1205 &= 5\cdot 241 = 34^2+7^2 = 26^2+23^2\\
1234 &= 2\cdot 617 = 35^2+3^2\\
1282 &= 2\cdot 641 = 29^2+21^2\\
1345 &= 5\cdot 269 = 36^2+7^2 = 33^2+16^2\\
1346 &= 2\cdot 673 = 35^2+11^2\\
1394 &= 2\cdot 17\cdot 41 = 37^2+5^2 = 35^2+13^2\\
1405 &= 5\cdot 281 = 37^2+6^2 = 27^2+26^2\\
1469 &= 13\cdot 113 = 38^2+5^2 = 37^2+10^2
\end{aligned}
$$

Table IV.

Fractions continues et premières solutions des équations de Fermat qui correspondent aux 41 bases de seconde espèce.

34 (35, 6)
5, 1, (4)
1 9 2

146 (145, 12)
12, (12)
1 2

178 (1601, 120)
13, 2, 1, (12)
1 9 17 2

194 (195, 14)
13, 1, (12)
1 25 2

205 (39689, 2772)
14, 3, 6, 1, (4)
1 9 4 21 5

221 (1665, 112)
14, 1, 6, (2)
1 25 4 13

305 (489, 28)
17, 2, (6)
1 16 5

377 (233, 12)
19, 2, (2)
1 16 13

386 (111555, 5678)
19, 1, 1, 1, 4, 1, (18),
1 25 14 23 7 31 2

410 (81, 4)
20, (4)
1 10

466 (938319425, 43466808)
21, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 5, 1, 3, 1, (20)
1 25 18 15 14 23 15 7 30 9 33 2

482 (483, 22)
21, 1, (20)
1 41 2

505 (809, 36)
22, 2, (8)
1 21 5

514 (4625, 204)
22, 1, 2, (22)
1 30 15 2

545 (1961, 84)
23, 2, 1, (8)
1 16 29 5

562 (220938497, 9319728)
23, 1, 2, 2, 2, 4, 1, 5, 1 (22)
1 33 14 17 18 9 34 7 39 2

578 (577, 24)
24, (24)
1 2

650 (51, 2)
25, (2)
1 25

674 (675, 26)
25, 1, (24)
1 49 2

689 (105, 4)
26, (4)
1 13

706 (34595, 1302)
26, 1, 1, 3, (26)
1 30 23 15 2

725 (9801, 364)
26, 1, 12, (2)
1 49 4 25

745 (12769001, 467820)
27, 3, 2, 1, 1, 5, 2, (10)
1 16 19 24 29 9 24 5

793 (4393, 156)
28, 6, (4)
1 9 13

802 (295496099, 10434330)
28, 3, 7, 1, 3, 6, (28)
1 18 7 39 14 9 2

850 (2449, 84)
29, 6, (2)
1 9 25

866 (42435, 1442)
29, 2, 2, 1, (28)
1 25 17 41 2

890 (179, 6)
29, 1, (4)
1 49 10

898 (899, 30)
29, 1, (28)
1 57 2

905 (361, 12)
30, (12)
1 5

1154 (1155, 34)
33, 1, (32)
1 65 2

1186 (6320195, 183522)
34, 2, 3, 1, 1, 4, (34)
1 30 17 33 34 15 2

1202 (10817, 312)
34, 1, 2, (34)
1 46 23 2

1205 (7174089, 206668)
34, 1, 2, 2, 16, 1, (12)
1 49 20 29 4 61 5

1234 (586327869067265, 16691023073856)
35, 7, 1, 3, 1, 4, 4, 2, 9, 1, 1, 2, 3, 1, 1, (34)
1 9 50 15 47 14 15 30 7 39 30 25 18 31 39 2

1282 (3410326403, 95247138)
35, 1, 4, 7, 1, 3, 9, 1, (34)
1 57 14 9 49 18 7 63 2

1345 (4841, 132)
36, 1, 2, (14)
1 49 24 5

1346 (340550115, 9282362)
36, 1, 2, 4, 1, 9, 1, 2, (36)
1 50 23 14 55 7 46 25 2

1394 (12545, 336)
37, 2, 1, (36)
1 25 49 2

1405 (2249, 60)
37, 2, (14)
1 36 (5)

1469 (760265, 19836)
38, 3, 18, 1, (4)
1 25 4 61 13

Table V.

Solutions des équations simultanées
$a = p^2+q^2$, $q \pm 1 = pv$, $u = p+qv$, $u^2 - av^2 = a-1$,
a étant une base de seconde espèce.

$34 = 5^2+3^2$,	$p = 3$	$q = 5$	$v = 2$	$u = 13$
$146 = 11^2+5^2$,	$p = 5$	$q = 11$	$v = 2$	$u = 27$
$178 = 13^2+3^2$,	$p = 3$	$q = 13$	$v = 4$	$u = 55$
$205 = 14^2+3^2$,	$p = 3$	$q = 14$	$v = 5$	$u = 73$
$221 = 11^2+10^2$,	$p = 10$	$q = 11$	$v = 1$	$u = 21$
$221 = 14^2+5^2$,	$p = 5$	$q = 14$	$v = 3$	$u = 47$
$377 = 19^2+4^2$,	$p = 4$	$q = 19$	$v = 5$	$u = 99$
$386 = 19^2+5^2$,	$p = 5$	$q = 19$	$v = 4$	$u = 81$
$466 = 21^2+5^2$,	$p = 5$	$q = 21$	$v = 4$	$u = 89$
$545 = 17^2+16^2$,	$p = 16$	$q = 17$	$v = 1$	$u = 33$
$650 = 23^2+11^2$,	$p = 11$	$q = 23$	$v = 2$	$u = 57$
$689 = 25^2+8^2$,	$p = 8$	$q = 25$	$v = 3$	$u = 83$
$745 = 27^2+4^2$,	$p = 4$	$q = 27$	$v = 7$	$u = 193$
$866 = 29^2+5^2$,	$p = 5$	$q = 29$	$v = 6$	$u = 179$
$890 = 29^2+7^2$,	$p = 7$	$q = 29$	$v = 4$	$u = 123$
$1186 = 31^2+15^2$,	$p = 15$	$q = 31$	$v = 2$	$u = 77$
$1205 = 34^2+7^2$,	$p = 7$	$q = 34$	$v = 5$	$u = 177$
$1345 = 36^2+7^2$,	$p = 7$	$q = 36$	$v = 5$	$u = 187$

TABLE DES MATIÈRES

Pages

Avant-Propos 3

PREMIÈRE PARTIE
Sur les sommes de deux carrés.

I. Bases de seconde espèce 7
II. Sur la nature des sommes de deux carrés 11
III. Des équations du genre 4 16
IV. Sur l'équation $u^2 - av^2 = a - 1$ 20
V. Sur la somme de deux carrés consécutifs 24

DEUXIÈME PARTIE
Sur les bases $a = \alpha^2 + 1$.

VI. Formules récursives générales 28
VII. Valeur minimum du paramètre ω 32
VIII. Genre des équations au paramètre minimum 36
IX. Sur les solutions des équations précédentes 40
X. Sur le paramètre $\omega = \alpha^2$ 42
XI. Détermination du rang de certains nombres 46

TROISIÈME PARTIE
Propriétés singulières du paramètre 4.

XII. Généralisations des formules de Cayley 52
XIII. L'équation $u^2 - 5v^2 = \pm 4$ 56
XIV. Le paramètre $\omega = 4$ 58
XV. Propriétés des équations résolubles 60
XVI. Des équations toujours résolubles 64
XVII. Des paramètres $4p^\varrho$ 67

QUATRIÈME PARTIE
D'autres équations de formes spéciales.

XVIII. Le paramètre $\omega = a - 1$ 70
XIX. Les paramètres $\omega = a + 1$, $\omega = a \pm 2$ 72

Pages

XX. La base $a = \alpha^2 - 1$ 76

XXI. Sur l'équation $(\alpha + 1)\, u^2 - (\alpha - 1)\, v^2 = 2$ 79

XXII. Sur les bases régulières 83

TABLES NUMÉRIQUES

concernant les sommes de deux carrés, inférieures à 1500.

Table I. Les 243 bases de première espèce 87

Table II. Les 44 couples de nombres $4a + 1$ et $4a + 5$ étant tous deux des bases de première espèce 88

Table III. Les 41 bases de seconde espèce et leurs décompositions. 88

Table IV. Fractions continues et premières solutions des équations de Fermat qui correspondent aux 41 bases de seconde espèce. 90

Table V. Solutions des équations simultanées $a = p^2 + q^2$, $q \pm 1 = pv$, $u = p + qv$, $u^2 - av^2 = a - 1$, a étant une base de seconde espèce 93

Forelagt paa Mødet den 9. Februar 1923.
Færdig fra Trykkeriet den 4. Juli 1923.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **V**, 5.

SUR LE GENRE

DE CERTAINES

ÉQUATIONS DE LAGRANGE

PAR

NIELS NIELSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1923

AVANT-PROPOS

La détermination générale du genre d'une équation de Lagrange

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\vartheta} \omega \tag{1}$$

est évidemment un problème très difficile.

En effet, ce genre, savoir le nombre des suites formées des solutions de l'équation (1), ne dépend pas seulement du nombre des facteurs premiers du paramètre ω, mais aussi, et d'une manière apparemment très cachée, de la nature de la base a.

Soit r le nombre des facteurs premiers de ω, nous savons que le genre de l'équation (1) est au plus égal à 2^r, ce qui a par exemple toujours lieu pour les bases 2, 3, 5, pourvu que ω ne soit pas, pour $a = 3$, de la forme $4k+2$; dans ce cas, le genre se réduit à 2^{r-1}.

Remarquons que l'équation (1) ne peut jamais être résoluble, à moins que tous les facteurs premiers de ω ne soient diviseurs de la forme quadratique

$$x^2 - a y^2, \tag{2}$$

puis supposons que l'équation (1) ne soit pas résoluble pour des valeurs impaires de ω, inférieures à une certaine limite ω_1, de sorte que la résolubilité de (1) exige

$$\omega \geqq \omega_1, \tag{3}$$

il est évident que cette condition exclut, comme paramètres, les diviseurs premiers de la forme quadratique (2) qui sont inférieurs à ω, ce qui a pour conséquence que d'autres de ces diviseurs premiers deviennent aussi inapplicables, comme paramètres de l'équation proposée. Et cette exclusion des diviseurs premiers de la forme quadratique (2) conduira à un autre problème difficile, savoir la détermination de la hauteur des diviseurs premiers susdits.

En effet, soit p un de ces diviseurs premiers exclus, il existe un nombre ϱ, tel que l'équation

$$u^2 - a v^2 = (-1)^\vartheta p^k \tag{4}$$

est résoluble, pourvu que k soit multiple de ϱ, et seulement dans ce cas.

Or, la détermination générale de la valeur limite inférieure ω_1 étant évidemment si difficile qu'il peut être désigné comme irrésoluble, j'ai étudié, et dans le Mémoire présent et dans une publication récente[1], certaines bases de formes spéciales, contenant un paramètre quelconque, notamment les bases

$$\alpha^2 \pm 1, \quad \alpha^2 \pm 2, \quad \alpha(\alpha+1),$$

pour lesquelles il est rélativement facile de déterminer la limite inférieure ω_1. Et j'ai appliqué les résultats ainsi obtenus à l'établissement des tables jointes au présent Mémoire, tables qui donnent un élément primitif de chacun des couples de suites coordonnées de toutes les équations résolubles de la forme

$$u^2 - a v^2 = (-1)^\vartheta \omega, \quad a = 34,\ 79,\ 82,\ 101$$

qui correspondent à $\omega \leqq 1000$.

[1] Recherches sur certaines équations de Lagrange de formes spéciales.

Quant au genre de l'équation (1), ce nombre est généralement diminué par l'adjonction à la base a du facteur carré p^2, de sorte qu'il s'agit de cette autre équation de LAGRANGE

$$u^2 - (ap^2)v^2 = (-1)^{\vartheta_1}\omega, \tag{5}$$

ou, ce qui est la même chose, des solutions de l'équation (1), dans lesquelles le nombre v est multiple de p. Et cette diminution dépend en quelque mesure du rang de p, par rapport à la base a, savoir du plus petit indice r pour lequel le nombre B_μ, tiré de l'équation de FERMAT

$$A_\mu^2 - aB_\mu^2 = (-1)^{\mu\varepsilon},$$

soit multiple de p.

La troisième Partie du Mémoire, que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie Royale des Sciences, donne la résolution du problème concernant les équations de LAGRANGE qui admettent des solutions de la forme (s, v) et (u, v) ou (s, t) et (s, v), problème qui s'est présenté dans les recherches précédentes.

Copenhague, le 20 avril 1923.

NIELS NIELSEN.

PREMIÈRE PARTIE

Applications des bases $\alpha^2 \pm 1$.

I. Théorème sur l'équation de Fermat.

Les équations spéciales

$$(1) \qquad x^2-(\alpha^2+1)y^2 = \pm 1\,, \quad x^2-(\alpha^2-1)y^2 = 1$$

jouent un rôle assez important, dans la théorie générale de l'équation de Fermat

$$(2) \qquad x^2 - a y^2 = (-1)^{\delta},$$

parce que cette dernière équation est en quelque mesure identique aux équations spéciales correspondantes.

En effet, désignons par (A_μ, B_μ) une solution quelconque de l'équation (2), savoir

$$(3) \qquad A_\mu^2 - a B_\mu^2 = (-1)^{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \mu\delta,$$

nous savons que la solution générale de cette autre équation

$$(4) \qquad x^2 - (a B_\mu^2) y^2 = (-1)^{z}$$

se présente sous la forme

$$(5) \qquad \alpha_n = A_{n\mu}\,, \quad \beta_n = \frac{B_{n\mu}}{B_\mu},$$

de sorte que nous aurons, quel que soit l'indice n,

$$(6) \qquad \alpha_n^2 - (a B_\mu^2)\beta_\mu^2 = (-1)^{nz}.$$

Appliquons ensuite l'équation (3), il résulte, en vertu de (4) et (5),

$$(7)\quad \begin{cases} x^2-(A_\mu^2-(-1)^\varepsilon)y^2=(-1)^z \\ \alpha_n^2-(A_\mu^2-(-1)^\varepsilon)\beta_n^2=(-1)^{nz}, \end{cases}$$

où les exposants ε et z sont de même parité, et il est évident que ces deux dernières équations sont précisément de la forme spéciale (1).

Cela posé, les identités algébriques

$$(4\alpha^3+3\alpha)^2-(\alpha^2+1)(4\alpha^2+1)^2=-1$$
$$(4\alpha^3-3\alpha)^2-(\alpha^2-1)(4\alpha^2-1)^2=1,$$

tirées directement des équations (1), parce que les premières solutions de ces équations deviennent respectivement

$$(\alpha,\ 1),\quad (2\alpha^2+1,\ 2\alpha),\quad (4\alpha^3+3\alpha,\ 4\alpha^2+1),\ \ldots$$
$$(\alpha,\ 1),\quad (2\alpha^2-1,\ 2\alpha),\quad (4\alpha^3-3\alpha,\ 4\alpha^2-1),\ \ldots,$$

donnent immédiatement, en vertu de (7),

$$(8)\qquad B_{3\mu}=B_\mu(4A_\mu^2-(-1)^\varepsilon),$$

formule qu'il est facile de généraliser beaucoup.

En effet, la conclusion de n à $n+1$ donnera immédiatement, en vertu de (8), la proposition curieuse:

I. Soit n un positif entier quelconque, on aura toujours

$$(9)\quad \begin{cases} B_{\mu 3^{n+1}}=B_\mu(4A_\mu^2-(-1)^\varepsilon)(4A_{3\mu}-(-1)^\varepsilon)\ldots \\ \qquad\qquad (4A_{\mu 3^n}^2-(-1)^\varepsilon). \end{cases}$$

On voit que cette formule générale se présente sous forme élegante pour les équations spéciales (1), car on aura respectivement, en posant $\mu=1$,

$$(10)\qquad B_{3^{n+1}}=(4\alpha^2+1)(4A_3^2+1)\ldots(4A_{3^n}^2+1),$$
$$(11)\qquad B_{3^{n+1}}=(4\alpha^2-1)(4A_3^2-1)\ldots(4A_{3^n}^2-1).$$

Soit par exemple, dans la formule (10), $\alpha=1$, de sorte qu'il s'agit de l'équation classique

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1,$$

on aura

$$A_1 = 1, \quad A_3 = 7,$$

ce qui donnera

$$B_9 = 5 \cdot 197 = 985.$$

II. Applications aux bases de première espèce.

Les deux équations spéciales (1) de l'article précédent jouent aussi un rôle important, dans la théorie des équations de Lagrange

(1) $$u^2 - av^2 = (-1)^\delta \omega.$$

A cet effet, étudions tout d'abord l'équation (1) qui correspond à une base de première espèce, de sorte que nous aurons, en vertu de la formule (3) de l'article précédent,

(2) $$A_{2n+1}^2 - aB_{2n+1}^2 = -1.$$

Cela posé, l'identité évidente

(3) $$(\alpha \pm 1)^2 - (\alpha^2 + 1) \cdot 1^2 = \pm 2\alpha$$

donnera immédiatement la proposition intéressante:

I. Soit a une base impaire de première espèce, quelconque du reste, l'équation de Lagrange

(4) $$u^2 - av^2 = \pm 2A_{2n+1}$$

est toujours résoluble, ayant, quel que soit l'indice n, les deux solutions

(5) $$(A_{2n+1} - 1, \ B_{2n+1}), \quad (A_{2n+1} + 1, \ B_{2n+1}).$$

Quant aux bases paires de première espèce, les identités algébriques

(6) $$(\alpha \pm 2)^2 - (\alpha^2 + 1) \cdot 1^2 = \pm 4\alpha + 3$$

(7) $$(2\alpha \mp 1)^2 - (\alpha^2 + 1) \cdot 2^2 = \mp 4\alpha - 3$$

donnent la proposition, analogue à la précédente:

II. Soit a une base quelconque de première espèce, au moins une des équations de Lagrange

$$u^2 - av^2 = \pm(4A_{2n+1} \pm 3) \tag{8}$$

est toujours résoluble.

En effet, remarquons que les deux nombres

$$\alpha - 2, \quad 4\alpha - 3$$

sont premiers entre eux, pour

$$\alpha = 3k, \quad \alpha = 3k+1,$$

l'équation

$$u^2 - av^2 = \pm(4A_{2n+1} - 3) \tag{9}$$

est toujours résoluble, pourvu que A_{2n+1} ne soit pas de la forme $3k+2$, et qu'elle admet les solutions

$$(A_{2n+1} - 2,\ B_{2n+1}), \quad (2A_{2n+1} + 1,\ 2B_{2n+1}). \tag{10}$$

Et l'on voit, par le même procédé, que l'équation correspondante

$$u^2 - av^2 = \pm(4A_{2n+1} + 3) \tag{11}$$

est toujours résoluble, pourvu que A_{2n+1} ne soit pas de la forme $3k+1$, et qu'elle admet les solutions

$$(A_{2n+1} + 2,\ B_{2n+1}), \quad (2A_{2n+1} - 1,\ 2B_{2n+1}). \tag{12}$$

Cela posé, la forme même des solutions (5), (10), (11) montre clairement que les équations résolubles (4) et (8), admettent toujours le diviseur B_{2n+1}; posons donc

$$v = v_1 B_{2n+1},$$

puis appliquons l'équation (2), il résulte, en vertu de (4) et (8),

$$u^2 - (A_{2n+1}^2 + 1)\, v_1^2 = \pm 2A_{2n+1}$$
$$u^2 - (A_{2n+1}^2 + 1)\, v_1^2 = \pm(4A_{2n-1} \pm 3),$$

ce qui n'est autre chose que les équations spéciales (3), (6), (7), et j'ai récemment démontré[1] que ces équations sont toujours du genre 2, ce qui donnera la proposition curieuse:

III. Le diviseur B_{2n+1} ne peut appartenir, quels que soient la base a et l'indice n, qu'à un seul couple de suites coordonnées formées des solutions de l'équation correspondante (4), (8), (11).

Ce résultat est bien intéressant, parce que l'équation en question (4), (8), (11) est souvent d'un genre supérieur à 2, ce qui montre que le genre d'une équation de Lagrange peut être diminué, quand on augmente le nombre des facteurs premiers de la base a.

Remarquons encore que l'équation (4) ou (8) qui admet le diviseur B_{2n+1} est toujours du genre 2, quel que soit le nombre des facteurs premiers du paramètre $2A_{2n+1}$ respectivement $4A_{2n+1} \pm 3$.

Soit par exemple $a = 61$, on aura

$$A_1 = 29718 = 2 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 127$$
$$B_1 = 3805 = 5 \cdot 761;$$

dans ce cas, l'équation

$$u^2 - 61 v^2 = \pm 59436$$

est parfaitement décomposable et par conséquent du genre 16, mais seulement 2 de ces 16 suites admettent le diviseur 3805.

Quant au genre de l'équation (4), qui est, à ce point de vue, la plus simple des équations susdites, nous avons encore à démontrer les deux lemmes suivants:

IV. Supposons résoluble l'équation

[1] Voir l'article VIII de mon Mémoire: Recherches sur certaines équations de Lagrange de formes spéciales.

(13) $$u^2 - a v^2 = \pm 4,$$

l'équation (4) est toujours au moins du genre 4.

Dans ce cas, on aura

$$a = 8k+5, \quad 2A_{2n+1} = 16l+4,$$

de sorte que l'équation

$$u^2 - a v^2 = \pm(4l+1)$$

est résoluble; c'est-à-dire que l'équation (4) est décomposable et par conséquent au moins du genre 4.

V. Supposons que la base a se présente sous la forme

(14) $$a = (2\alpha+1)^2+4, \quad \alpha = 3k,\ 3k+2,$$

où k est un positif entier, l'équation (4) est toujours, pour $n = 0$, au moins du genre 8.

En effet, on aura ici

$$2A_1 = (2\alpha+1)((2\alpha+1)^2+3) = 4(2\alpha+1)(\alpha^2+\alpha+1)$$
$$a-1 = 4(\alpha^2+\alpha+1),$$

et les équations de Lagrange

$$u^2 - a v^2 = \pm(2\alpha+1)$$
$$u^2 - a v^2 = \pm(\alpha^2+\alpha+1)$$

sont toutes deux résolubles, de sorte qu'il ne s'agit que de démontrer que les deux nombres

$$p = 2\alpha+1, \quad q = \alpha^2+\alpha+1,$$

toujours impairs, sont premiers entre eux.

Or, nous aurons évidemment

$$4q - p^2 = 3,$$

et p n'est pas multiple de 3, parce que $\alpha = 3k$ ou $\alpha = 3k+2$.

Dans l'article IV, nous avons à donner la forme géné-

rale des équations du genre 2 que nous venons de considérer, et, dans l'article IX, nous avons à étudier plus amplement la forme singulière des solutions (5).

III. Applications aux bases de seconde espèce.

Quant aux nombres A_{2n} et aux bases de seconde espèce, nous avons tout d'abord à étudier l'équation spéciale

$$u^2-(\alpha^2-1)v^2=(-1)^\delta\omega \tag{1}$$

et à démontrer le lemme fondamental:

I. Soit $\alpha=3k$ ou $\alpha=3k+1$, la valeur minimum du paramètre ω, dans l'équation résoluble (1), est

$$\omega=4\alpha-5, \tag{2}$$

tandis que l'hypothèse $\alpha=3k+2$ donnera, pour $k\geq 2$,

$$\omega=4\alpha+5, \tag{3}$$

et les deux valeurs exclues $k=0$, $k=1$ exigent

$$\omega=\alpha^2-2. \tag{4}$$

A cet effet, il nous semble utile d'étudier plus amplement certaines valeurs spéciales du paramètre ω.

En premier lieu, posons, dans l'équation (1),

$$u=r\alpha+s,\quad v=r, \tag{5}$$

où r et s sont des positifs entiers plus petits que α, nous aurons

$$\omega=2rs\alpha+r^2+s^2, \tag{6}$$

et, la solution réciproque (u_1, v_1) étant, pour $\delta=0$, déterminée par les expressions

$$u_1=uA_1-\alpha vB_1,\quad v_1=uB_1-vA_1,$$

nous aurons ici

$$u_1=s\alpha+r,\quad v_1=s. \tag{7}$$

Or, l'hypothèse $r = s = 1$ étant inadmissible, parce que la valeur correspondante $u = \alpha + 1$ divise la base a, la plus petite valeur de ω, définie par la formule (6) deviendra

$$\omega = 4\alpha + 5,$$

valeur qui est applicable pour

$$\alpha = 3k, \quad \alpha = 3k + 2,$$

car les deux nombres

$$u = \alpha + 2, \quad \omega = 4\alpha + 5$$

sont premiers entre eux, à moins qu'ils ne soient tous deux multiples de 3, ce qui exige

$$\alpha = 3k + 1.$$

En second lieu, posons

(8) $$u = r\alpha - s, \quad v = r,$$

où r et s sont des positifs entiers, plus petits que α, nous aurons

(9) $$\omega = 2rs\alpha - r^2 - s^2,$$

et, la solution réciproque (u_1, v_1) étant, pour $\delta = 1$, déterminée par les formules

$$u_1 = auB_1 - uA_1, \quad v_1 = vA_1 - uB_1,$$

nous aurons ici

(10) $$u_1 = s\alpha - r, \quad v_1 = s.$$

On voit que l'hypothèse $r = s = 1$ est exclue, aussi dans ce cas, parce que le nombre correspondant $u = \alpha - 1$ divise la base a, de sorte que la plus petite valeur de ω, définie par la formule (9), deviendra

$$\omega = 4\alpha - 5.$$

En effet, remplaçons, dans ω, le nombre r par $r_1 < r$, ce qui donnera

$$\omega_1 = 2r_1 s\alpha - r_1^2 - s^2,$$

nous aurons

$$\omega - \omega_1 = (r - r_1)(2s\alpha - (r + r_1)) > 0,$$

parce que $s > 1$, $r > r_1$, $r < \alpha$, $r_1 < \alpha$. Posons ensuite

$$\omega_2 = 2rs_1\alpha - r^2 - s_1^2, \quad s_1 > s,$$

nous aurons de même $\omega_2 > \omega$.

Quant à la valeur minimum de ω, ainsi définie, elle n'est applicable, à moins que les deux nombres

$$\omega = 4\alpha - 5, \quad u = \alpha - 2$$

ne soient premiers entre eux. Or, ω et u ayant le plus grand commun diviseur 3, il faut exclure les valeurs

$$\alpha = 3k + 2.$$

Il nous reste encore à comparer les deux valeurs minimum de ω, que nous venons de déterminer, et le paramètre

$$\alpha^2 - 2 = a - 1,$$

toujours applicable.

Nous aurons

$$\alpha^2 - 2 < 4a - 5, \quad \alpha^2 - 4\alpha + 3 < 0,$$

pour la seule valeur $\alpha = 2$, tandis que l'hypothèse $\alpha = 3$ donnera

$$\alpha^2 - 2 = 4\alpha - 5 = 7.$$

Étudions ensuite l'inégalité

$$\alpha^2 - 2 < 4\alpha + 5. \quad \alpha^2 - 4\alpha - 7 < 0,$$

elle est satisfaite pour

$$\alpha = 2, 3, 4, 5,$$

et seulement dans ces cas.

Cela posé, étudions ensuite l'équation (1) qui correspond à

$$\delta = 0,$$

puis posons

$$u = r\alpha + s, \quad v = t; \quad 0 < s < \alpha - 1,$$

il résulte, pour la solution réciproque (u_1, v_1),

$$u_1 = (r-t)\alpha^2 + s\alpha + t$$
$$v_1 = (r-t)\alpha + s,$$

ce qui exige nécessairement $r \geqq t$; donc nous aurons

$$\omega = (r^2-t^2)\alpha + 2rs\alpha + s^2 + t^2 > 4\alpha + 5,$$

inégalité qui est évidente pour $r > t$, et le cas spécial $r = t$ est étudié dans les développements précédents.

Quant à l'équation (1) qui correspond à l'hypothèse

$$\delta = 1,$$

posons tout d'abord

$$u = \alpha - s, \quad v = t; \quad 0 \leq s \leq \alpha - 1, \quad t > 1,$$

nous aurons

$$\omega = t^2(\alpha^2-1) - (\alpha-s)^2 \geq t^2(\alpha^2-1) - \alpha^2 \geqq 3\alpha^2 - 4;$$

c'est-à-dire que l'inégalité

$$\omega > 4\alpha + 5$$

est évidente, pourvu que

$$\alpha > \frac{2+\sqrt{31}}{3},$$

ce qui a certainement lieu pourvu que $\alpha \geq 3$, et la valeur $\alpha = 2$, savoir $a = 3$, ne joue aucun rôle à ce point de vue.

Posons ensuite généralement

$$u = r\alpha + s, \quad v = t; \quad 0 < s < \alpha - 1,$$

il résulte, pour la solution réciproque (u_1, v_1),

$$u_1 = (t-r)\alpha^2 - t^2 - s\alpha \tag{11}$$
$$v_1 = (t-r)\alpha - s, \tag{12}$$

de sorte que nous aurons nécessairement

$$t > r,$$

et le paramètre ω deviendra, dans ce cas,

$$\omega = t^2(\alpha^2-1) - (r\alpha+s)^2 = (t^2-r^2)\alpha^2 - 2rs\alpha - s^2 - t^2. \tag{13}$$

Or, t étant au moins égal à un, nous aurons, en vertu de (11),

$$(t-r)\alpha^2 \geqq t+s\alpha+u_1,$$

d'où il résulte

$$(t^2-r^2)\alpha^2 \geqq t(t+r)+(t+r)s\alpha+(t+r)u_1,$$

ce qui donnera en vertu de (13),

$$\omega \geqq (t-r)s\alpha+tr-s^2+(t+r)u_1. \tag{14}$$

Remarquons maintenant que le cas particulier précédent permet de supposer à la fois

$$u > \alpha, \quad u_1 > \alpha,$$

puis supposons à l'instant $t \geqq r+2$, nous aurons, en vertu de (14),

$$\omega \geqq 2s\alpha+tr-s\alpha+(t+r)(\alpha+1) > 4\alpha+5.$$

Quant au cas exclu $t = r+1$, posons

$$s_1 = \alpha - s,$$

nous aurons

$$u = t\alpha - s_1, \quad v = t; \quad 1 < s_1 < \alpha - 1,$$

cas particulier que nous avons déjà étudié.

Cela posé, remarquons que, dans les deux cas exclus

$$\alpha = 2, \quad \alpha = 5,$$

savoir

$$\alpha^2 - 1 = 3, \quad \alpha^2 - 1 = 24,$$

la plus petite valeur possible de ω deviendra respectivement

$$\omega = 2, \quad \omega = 23$$

et que ces deux nombres sont premiers, nous avons démontré cette autre proposition:

II. L'équation (1) qui correspond à la valeur minimum du paramètre ω est toujours du genre 2, abstraction faite du seul cas $\alpha = 2$, où l'équation en question n'est que du genre 1.

On voit que cette dernière proposition donnera immédiatement le corollaire, très utile dans ce qui suit:

III. Les équations résolubles de la forme

$$u^2-(a^2-1)v^2=5\pm 4a \tag{15}$$

sont toujours du genre 2.

Partons maintenant de l'équation de Fermat

$$A_n^2-aB_n^2=1\,, \tag{16}$$

de sorte que a est une base de seconde espèce, où l'indice n est un nombre pair, nous avons à démontrer le théorème suivant, analogue aux propositions I et II de l'article précédent:

IV. Au moins une des deux équations de Lagrange

$$u^2-av^2=5\pm 4A_n \tag{17}$$

est toujours résoluble, quel que soit l'indice n.

En effet, remarquons que l'équation de Lagrange

$$u^2-(aB_n^2)v^2=(-1)^\delta\omega$$

n'est, en vertu de (16), autre chose que celle-ci

$$u^2-(A_n^2-1)v^2=(-1)^\delta\omega\,,$$

il est évident que les équations (17) admettent les solutions

$$(A_n+2,\ B_n)\,,\quad (2A_n+1,\ 2B_n) \tag{18}$$

respectivement

$$(A_n-2,\ B_n)\,,\quad (2A_n-1,\ 2B_n). \tag{18 bis}$$

Cela posé, nous verrons que les équations résolubles (17) admettent toutes deux le diviseur B_n, et la proposition III donnera immédiatement cette autre, analogue au théorème III de l'article précédent:

V. Le diviseur B_n ne peut appartenir, quels que soient la base a et l'indice n, qu'à un seul couple

de suites coordonnées formées des solutions de l'équation correspondante (17).

IV. Résolution générale des équations précédentes du genre 2.

Il est bien intéressant, ce me semble, que l'on détermine facilement les solutions générales des équations qui admettent le diviseur B_n et que nous venons d'étudier, dans les deux articles précédents.

A cet effet, nous étudions tout d'abord l'équation

$$u^2 - a v^2 = \pm 2 A_{2r+1}, \tag{1}$$

et nous désignons par

$$\begin{aligned} &(u_1, v_1), \ (u_2, v_2), \ \ldots, \ (u_n, v_n), \ \ldots \\ &(u'_1, v'_1), \ (u'_2, v'_2), \ \ldots, \ (u'_n, v'_n), \ \ldots \end{aligned}$$

les deux suites coordonnées auxquelles appartiennent les solutions

$$(A_{2r+1} \pm 1, \quad B_{2r+1}), \tag{2}$$

il est évident que ces solutions sont des éléments de chacune des suites susdites.

Posons donc

$$\begin{cases} A_{2r+1} - 1 = u_{\lambda+1}, & B_{2r-1} = v_{\lambda+1} \\ A_{2r+1} + 1 = u'_{\mu+1}, & B_{2r+1} = v'_{\mu+1} \end{cases} \tag{3}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} u_{\lambda+1} u'_{\mu+1} + a v_{\lambda+1} v'_{\mu+1} &= 2 A_{2r+1}^2 \\ u_{\lambda+1} v'_{\mu+1} + v_{\lambda+1} u'_{\mu+1} &= 2 A_{2r+1} B_{2r+1}, \end{aligned}$$

ce qui donnera, en vertu des formules fondamentales concernant les suites coordonnées,

$$\lambda + \mu = 2r. \tag{4}$$

De plus, il résulte, en vertu de (3),

$$A_{2r+1}-1 = A_\lambda u_1 + aB_\lambda v_1, \quad B_{2r+1} = A_\lambda v_1 + B_\lambda u_1$$
$$A_{2r-1}+1 = A_\mu u'_1 - aB_\mu v'_1, \quad B_{2r+1} = A_\mu v'_1 + B_\mu u'_1,$$

de sorte que nous aurons

$$(5)\quad \begin{cases} u_1 = A_{2r-\lambda+1}-(-1)^\lambda A_\lambda, & v_1 = B_{2r-\lambda+1}+(-1)^\lambda B_\lambda \\ u'_1 = A_{2r-\mu+1}+(-1)^\mu A_\mu, & v'_1 = B_{2r-\mu+1}-(-1)^\mu B_\mu. \end{cases}$$

Remarquons ensuite que les nombres qui figurent aux seconds membres de ces formules satisfont, quels que soient les indices λ et μ, à l'équation (1), il est évident que les éléments primitifs correspondent aux hypothèses

$$\lambda = \mu = r,$$

ce qui donnera

$$(6)\qquad u_1 = A_{r+1}-(-1)^r A_r, \quad v_1 = B_{r+1}+(-1)^r B_r$$
$$(7)\qquad u'_1 = A_{r-1}+(-1)^r A_r, \quad v'_1 = B_{r-1}-(-1)^r B_r.$$

Cela posé, il est facile de déterminer les éléments généraux des deux suites coordonnées en question.

En effet, soit tout d'abord $s < r$, on aura, en vertu des formules récursives de Lagrange,

$$(8)\quad \begin{cases} u_{s+1} = A_{r+s+1}-(-1)^s A_{r-s}, & v_{s+1} = B_{r+s+1}+(-1)^s B_{r-s} \\ u'_{s+1} = A_{r+s-1}+(-1)^s A_{r-s}, & v'_{s+1} = B_{r+s+1}-(-1)^s B_{r-s}, \end{cases}$$

tandis que l'hypothèse $s \geqq r$ donnera

$$(9)\quad \begin{cases} u_{s+1} = A_{r+s+1}-(-1)^r A_{s-r}, & v_{s+1} = B_{r+s+1}+(-1)^r B_{s-r} \\ v'_{s+1} = A_{r+s+1}+(-1)^r A_{s-r}, & v'_{s+1} = B_{r+s+1}-(-1)^r B_{s-r}, \end{cases}$$

Quant à l'équation

$$(10)\qquad u^2 - av^2 = \pm(4A_{2n+1} \pm 3),$$

le même procédé donnera les éléments primitifs

$$(11)\quad \begin{cases} u_1 = A_{n-1} \pm (-1)^n 2A_n, & v_1 = B_{n+1} \mp (-1)^n 2B_n, \\ u_1' = 2A_{n+1} \mp (-1)^n A_n, & v_1' = 2B_{n+1} \pm (-1)^n B_n, \end{cases}$$

de sorte que l'on aura, pour $s \leqq n$,

$$(12)\quad \begin{cases} u_{s+1} = A_{n-s+1} \pm (-1)^{n-s} 2A_{n-s}, \\ v_{s+1} = B_{n-s-1} \mp (-1)^{n-s} 2B_{n-s}, \\ u_{s+1}' = 2A_{n-s+1} \mp (-1)^{n-s} A_{n-s}, \\ v_{s-1}' = 2B_{n+s+1} \pm (-1)^{n-s} B_{n-s}, \end{cases}$$

et, pour $s > n$,

$$(13)\quad \begin{cases} u_{s+1} = A_{n+s+1} \pm 2A_{s-n}, & v_{s+1} = B_{n+s+1} \pm 2B_{s-n} \\ u_{s+1}' = 2A_{n+s+1} \mp A_{s-n}, & v_{s+1}' = 2B_{n+s+1} \pm B_{s-n}. \end{cases}$$

Dans ces formules, les signes doubles correspondent au signe du nombre 3 qui figure au second membre de l'équation (10).

Nous avons encore à étudier l'équation

$$(14)\qquad u^2 - a v^2 = \pm 4A_n + 5,$$

de sorte que a est une base de seconde espèce ou n est pair.

Le procédé ordinaire donnera ici les éléments primitifs

$$(15)\quad u_1 = A_{n-\mu} \pm (-1)^{\mu\varepsilon} 2A_\mu, \quad v_1 = B_{n-\mu} \mp (-1)^{\mu\varepsilon} 2B_\mu$$

$$(16)\quad v_1' = 2A_{n-\nu} \pm (-1)^{\nu\varepsilon} A_\nu, \quad v_1' = 2B_{n-\nu} \mp (-1)^{\nu\varepsilon} B_\nu,$$

où nous avons posé, comme ordinairement

$$A_1^2 - aB_1^2 = (-1)^\varepsilon.$$

Supposons maintenant tout d'abord que l'indice n soit un nombre impair, puis remplaçons n par $2n+1$, a est nécessairement une base de seconde espèce, ce qui donnera $\varepsilon = 0$.

Dans ce cas, il est évident que les éléments primitifs correspondent à

$$\mu = \nu = n,$$

ce qui donnera

$$(17) \qquad u_1 = A_{n+1} \pm 2A_n, \quad v_1 = B_{n+1} \mp 2B_n$$

$$(18) \qquad u'_1 = 2A_{n+1} \pm A_n, \quad v'_1 = 2B_{n+1} \mp B_n,$$

et nous aurons pour $\mu \leqq n$

$$(19) \quad u_{\mu+1} = A_{n+\mu+1} \pm 2A_{n-\mu}, \quad v_{\mu+1} = B_{n+\mu+1} \mp 2B_{n-\mu}$$

$$(20) \quad u'_{\mu+1} = 2A_{n+\mu+1} \pm A_{n-\mu}, \quad v'_{\mu+1} = 2B_{n+\mu+1} \mp B_{n-\mu},$$

et, pour $\mu \geqq n$,

$$(21) \quad v_{\mu+1} = A_{n+\mu+1} \pm 2A_{\mu-n}, \quad v_{\mu+1} = B_{n+\mu-1} \pm B_{\mu-n}$$

$$(22) \quad u'_{\mu+1} = 2A_{n+\mu+1} \pm 2A_{\mu-n}, \quad v'_{\mu+1} = 2B_{n+\mu+1} \pm B_{\mu-n}.$$

Quant au cas, où n est un nombre pair, nous remplaçons n par $2n$, et il est évident que les éléments primitifs correspondent à la valeur

$$\mu = \nu = n-1,$$

de sorte que nous aurons

$$(23) \quad \begin{cases} u_1 = A_{n+1} \pm (-1)^{n\varepsilon-\varepsilon} 2A_{n-1}, \\ v_1 = B_{n+1} \mp (-1)^{n\varepsilon-\varepsilon} 2B_{n-1}, \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} u'_1 = 2A_{n+1} \pm (-1)^{n\varepsilon-\varepsilon} A_{n-1}, \\ v'_1 = 2B_{n+1} \mp (-1)^{n\varepsilon-\varepsilon} B_{n-1}, \end{cases}$$

et, pour $\mu \leqq n-1$,

$$(25) \quad \begin{cases} u_{\mu+1} = A_{n+\mu+1} \pm (-1)^{n\varepsilon+\mu\varepsilon-\varepsilon} 2A_{n-\mu-1}, \\ v_{\mu+1} = B_{n+\mu+1} \mp (-1)^{n\varepsilon+\mu\varepsilon-\varepsilon} 2B_{n-\mu-1}, \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} u'_{\mu+1} = 2A_{n+\mu+1} \pm (-1)^{n\varepsilon+\mu\varepsilon-\varepsilon} A_{n-\mu-1}, \\ v'_{\mu+1} = 2B_{n+\mu+1} \mp (-1)^{n\varepsilon+\mu\varepsilon-\varepsilon} B_{n-\mu-1}, \end{cases}$$

tandis qu'il résulte, pour $\mu \geqq n-1$,

$$(27)\quad u_{\mu-1} = A_{n+\mu} \pm 2A_{\mu-n}, \quad v_{\mu+1} = B_{n+\mu} \pm 2B_{\mu-n}$$

$$(28)\quad u'_{\mu+1} = 2A_{n+\mu} \pm A_{\mu-n}, \quad v'_{\mu+1} = 2B_{n+\mu} \pm B_{\mu-n}.$$

Dans ces dernières formules, les signes doubles correspondent au signe de $4A_n$ dans la formule (14).

DEUXIÈME PARTIE

Applications d'autres bases spéciales.

V. Sur la base $a = \alpha(\alpha+1)$.

Revenons maintenant à l'équation de LAGRANGE

$$u^2-(\alpha^2-1)\,v^2 = (-1)^\delta\omega, \tag{1}$$

étudiée dans l'article III, puis remplaçons α par $2\alpha+1$, nous aurons, pour la base

$$(2\alpha+1)^2-1 = 4\alpha(\alpha+1), \tag{2}$$

les valeurs minimum du paramètre

$$\omega = 8\alpha-1, \quad \omega = 8\alpha+9, \tag{3}$$

valeurs qui sont applicables, selon que

$$\alpha = 3k, \quad \alpha = 3k+1$$

respectivement

$$\alpha = 3k+1, \quad \alpha = 3k+2.$$

Or, la forme même de la base (2) conduira à étudier cette autre équation de LAGRANGE

$$u^2-\alpha(\alpha+1)\,v^2 = (-1)^\delta\omega. \tag{4}$$

A cet effet, remarquons tout d'abord que l'équation de FERMAT

$$x^2-\alpha(\alpha+1)\,y^2 = 1 \tag{5}$$

admet la solution primitive

$$x = 2\alpha+1, \quad y = 2, \tag{5 bis}$$

nous avons à démontrer la proposition:

I. La valeur minimum de ω qui admette de résoudre l'équation (4) est, pour α pair,

$$\omega = 3\alpha - 1; \tag{6}$$

pour α impair et plus grand que 3, on aura

$$\omega = 3\alpha + 4 \tag{7}$$

tandis qu'il résulte, pour $\alpha = 3$, $\alpha = 12$,

$$\omega = 11. \tag{8}$$

Quant à la démonstration de cette proposition, nous avons à étudier séparément les cas suivants:

1° $\quad u_1 = \alpha - r, \quad v_1 = 1; \quad 1 \leq r \leq \alpha - 1,$

ce qui donnera

$$\omega = (2r+1)\alpha - r^2, \tag{9}$$

tandis que la solution réciproque deviendra

$$u'_1 = (2r+1)\alpha + r, \quad v'_1 = 2r+1,$$

et il est évident que la plus petite valeur de ω, déterminée par la formule (9), correspond à $r = 1$, ce qui donnera

$$\omega = 3\alpha + 1.$$

2° $\quad u_1 = \alpha + r, \quad v_1 = 1; \quad 2 \leq r \leq \alpha + 1;$

nous aurons ici

$$\omega = (2r-1)\alpha + r^2, \tag{10}$$

et la solution réciproque deviendra

$$u'_1 = (2r-1)\alpha + r^2. \quad v'_1 = 2r-1,$$

tandis que la plus petite valeur de ω, déterminée par la formule (10), correspond à $r = 2$, ce qui donnera

$$\omega = 3\alpha + 4.$$

3° $\quad u_1 = \alpha + r, \quad v_1 = s > 2; \quad 2 < r < \alpha - 1,$

ce qui donnera

$$\omega = (s^2-1)\,\alpha^2 + (s^2-2r)\,\alpha - s^2,$$

de sorte que nous aurons

$$\omega \geqq 3\alpha^2 + (6-2\alpha)\,\alpha - (\alpha-1)^2 = 8\alpha - 1 > 3\alpha + 4.$$

4° $\quad u_1 = \alpha - r, \quad v_1 = s > 2; \quad 1 < r < \alpha - 1;$

on aura, dans ce cas,

$$\omega = (s^2-1)\,\alpha^2 + (s^2+2r)\,\alpha - r^2 > 3\alpha^2 + 6\alpha - (\alpha-1)^2,$$

ce qui donnera évidemment

$$\omega \geq 2\alpha^2 + 8\alpha - 1 > 3\alpha + 4.$$

5° $\quad u_1 \geq 2\alpha + 1, \quad v_1 > 2; \quad u'_1 > 2\alpha + 1. \quad v'_1 > 2,$

de sorte que l'on aura

$$2\omega = u_1 v'_1 + v_1 u'_1 > 8\alpha + 4,$$

savoir

$$\omega > 4\alpha + 2 > 3\alpha + 4,$$

pourvu que $\alpha \geqq 2$.

Remarquons ensuite que les deux nombres

$$\alpha - 1, \quad \alpha(\alpha+1)$$

sont premiers entre eux, pourvu que α soit pair, et que

$$\alpha - 1 < \alpha^2 + \alpha - 1 = a - 1,$$

la valeur minimum de ω est, dans ce cas, certainement $3\alpha - 1$.

Soit maintenant α un nombre impair, les deux nombres

$$\alpha + 2, \quad \alpha(\alpha+1)$$

sont toujours premiers entre eux, de sorte qu'il s'agit seulement de l'inégalité

$$\alpha^2 + \alpha - 1 \geq 3\alpha + 4,$$

savoir

$$\alpha^2 - 2\alpha - 5 \geqq 0,$$

ce qui exige

$$\alpha \geqq 1 + \sqrt{6},$$

de sorte qu'il faut considérer séparément les deux valeurs

$$\alpha = 1, \quad \alpha = 3.$$

Quant à l'hypothèse

$$\alpha = 1, \quad a = 2,$$

on aura bien

$$\omega = 7 = 2\alpha + 3,$$

tandis que

$$\alpha = 3, \quad a = 12$$

donnera la valeur minimum

$$\omega = 11.$$

Cela posé, il est évident que la démonstration précédente donnera immédiatement cette autre proposition:

II. Les équations résolubles de la forme

$$(11) \quad \begin{cases} u^2 - \alpha(\alpha+1)v^2 = -3\alpha + 1, \\ u^2 - \alpha(\alpha+1)v^2 = 3\alpha + 4 \end{cases}$$

sont toujours du genre 2.

VI. Sur la base $a = \alpha(4\alpha+1)$.

Nous avons encore à remplacer, dans la base étudiée, dans l'article précédent, α par 4α, ce qui conduira à la base nouvelle

(1) $$a = \alpha(4\alpha+1);$$

l'équation de Fermat correspondante

(2) $$x^2 - \alpha(4\alpha+1)y^2 = 1$$

a la solution primitive

(2 bis) $$A_1 = 8\alpha + 1, \quad B_1 = 4.$$

Quant à l'équation de Lagrange

(3) $$u^2 - \alpha(4\alpha+1)v^2 = (-1)^\delta \omega,$$

nous avons à démontrer la proposition:

I. La plus petite valeur de ω qui permette de résoudre l'équation (3) est

(4) $$\omega = 3\alpha + 1,$$

ce qui correspond à

(5) $$u = 2\alpha + 1, \quad v = 1, \quad \delta = 0,$$

et l'équation ainsi obtenue est toujours du genre 2.

Ici nous avons à considérer séparément les cas suivants:

1° $u = \alpha - r, \quad v = 1; \quad 1 \leq r < \alpha - 1,$

ce qui donnera

$$\omega = 4\alpha^2 + \alpha - (\alpha - r)^2 \geqq 4\alpha^2 + \alpha - 1 \geqq 3\alpha + 1.$$

2° $u = \alpha + r, \quad v = 1; \quad 1 \leq r \leqq \alpha - 1;$

on aura ici

$$\omega = 4\alpha^2 + \alpha - (\alpha + r)^2 \geqq 4\alpha^2 + \alpha - (2\alpha - 1)^2 = 5\alpha - 1 \geqq 3\alpha + 1.$$

3° $u = 2\alpha + r, \quad v = 1; \quad r > 1,$

ce qui donnera immédiatement

$$\omega = (2\alpha + r)^2 - 4\alpha^2 - \alpha \geqq 3\alpha + 1.$$

4° $u = \alpha - r, \quad v = s > 2; \quad 1 < r \leqq \alpha - 1;$

on trouve, dans ce cas,

$$\omega = (4s^2 - 1)\alpha^2 + (2r + s^2)\alpha - r^2 > 3\alpha + 1.$$

5° $u = \alpha + r, \quad v = s \geqq 2: \quad 1 < r \leqq 2\alpha - 1;$

ici on aura

$$\omega = 4s^2\alpha^2 + s^2\alpha - (\alpha + r)^2 \geqq (4s^2 - 9)\alpha^2 + s^2 > 7\alpha^2 + 4.$$

6° $u \geqq 3\alpha + 1, \quad v \geqq 2; \quad u' \geqq 3\alpha + 1, \quad v' > 2,$

où (u', v') est la solution réciproque de (u, v), et où les signes d'égalité ne sont pas simultanés.

Dans ce cas, on aura

$$4\omega = uv' + u'v > 12\alpha + 4; \quad \omega > 3\alpha - 1.$$

Enfin, remarquons que l'inégalité

$$a - 1 = 4\alpha^2 + \alpha - 1 \geqq 3\alpha + 1$$

est toujours satisfaite, notre proposition est établie.

Remarquons encore, en passant, que les deux équations de Lagrange

$$u^2-\alpha(p^2\alpha+1)v^2=(2p-1)\alpha+1 \tag{6}$$

$$u^2-\alpha(p^2\alpha+1)v^2=1-(2p+1)\alpha, \tag{7}$$

satisfaites par

$$u=p\alpha+1, \quad v=1$$

respectivement

$$u=p\alpha-1, \quad v=1,$$

sont résolubles, pourvu que les deux nombres

$$p-1, \quad \alpha-1$$

respectivement

$$p+1, \quad \alpha+1$$

soient premiers entre eux.

VII. Sur les bases $a=\alpha^2\pm 2$.

Quant aux autres bases de formes spéciales, remarquons que l'équation

$$u^2-(4\alpha^2+4\alpha+5)v^2=\pm\omega \tag{1}$$

n'admet que deux valeurs de ω plus petites que

$$\sqrt{4\alpha^2+4\alpha+5},$$

savoir

$$\omega=4, \quad \omega=2\alpha+1, \tag{2}$$

il est évident que $2\alpha+1$ est la plus petite valeur impaire de ω, pour laquelle l'équation (1) soit résoluble, et l'on aura, pour cette valeur spéciale,

$$u=2\alpha^2+\alpha+\alpha+1, \quad v=\alpha. \tag{2 bis}$$

Supposons ensuite que α ne soit pas de la forme $3k+1$, l'équation de Lagrange

$$u^2-(4\alpha^2+4\alpha-3)v^2=-4\alpha+3 \tag{3}$$

est résoluble et satisfaite par

$$u=2\alpha, \quad v=1. \tag{3 bis}$$

Ces remarques faites, nous avons à démontrer cette autre proposition, plus importante pour les appliquations:

I. La plus petite valeur impaire de ω, possible dans l'équation résoluble

$$u^2-(\alpha^2+2)\,v^2=(-1)^\delta\omega, \tag{4}$$

est

$$\omega=2\alpha-1, \tag{5}$$

pourvu que α ne soit pas de la forme $3k+2$; dans ce cas, on aura au contraire la valeur minimum

$$\omega=2\alpha+1. \tag{5 bis}$$

A cet effet, remarquons tout d'abord que les hypothèses

$$u\geq\alpha^2+1,\quad v>\alpha;\quad u_1\geq\alpha^2+1,\quad v_1\geq\alpha,$$

où (u, v) et (u_1, v_1) sont des solutions réciproques, donnent

$$\alpha\omega>\alpha(2\alpha^2+2),\quad \omega>2\alpha^2+2>2\alpha-1.$$

De plus, posons

$$u=\alpha^2+1,\quad v=t;\quad 1\leq t<\alpha,$$

nous aurons

$$\omega=\alpha^4+2\alpha^2+1-\alpha^2t^2-2t^2>2\alpha^2-2(\alpha-1)^2+1=$$
$$=4\alpha+3<2\alpha+1.$$

Étudions ensuite l'hypothèse

$$u=\alpha^2,\quad v=s;\quad 1<s<\alpha-1,$$

nous aurons

$$\omega\geq 2\alpha^3-3\alpha+4\alpha-2>2\alpha+1,$$

pourvu que $\alpha\geq 2$, et l'hypothèse $\alpha=1$, qui correspond à $a=5$, ne présente aucun intérêt spécial.

Cela posé, il est évident que la plus petite valeur impaire de ω correspond ou à l'hypothese

$$u=r\alpha+s,\quad v=t;\quad 1\leq r\leq\alpha-1,\quad 1\leq s\leq\alpha-1,\quad t\geq 1 \tag{6}$$

ou à l'hypothese

$$(7) \qquad u = \alpha - s, \quad v = t; \quad 1 \leqq s \leqq a-1, \quad t \geqq 1.$$

Étudions tout d'abord les expressions (7), puis supposons $r > t$, il résulte immédiatement

$$(8) \qquad \omega = (r^2 - t^2)\,\alpha^2 + 2rs\alpha + s^2 - 2t^2,$$

ce qui donnera

$$\omega > (2t+1)\,\alpha^2 + 2rs\alpha + s^2 - 2\alpha^2,$$

d'où à fortiori

$$\omega > (2t-1)\,\alpha^2 + 2rs\alpha + 1 > 2\alpha + 1.$$

Soit ensuite $r < t$, nous appliquons le nombre s_1, défini par l'équation

$$s + s_1 = \alpha,$$

ce qui donnera

$$u = (r+1)\,\alpha - s_1 = r_1\alpha - s_1,$$

où nous avons posé

$$r_1 = r+1 \leqq t,$$

de sorte que nous aurons, dans ce cas,

$$\omega \geqq 2r_1 s_1 \alpha + 2t^2 - s_1^2 > (2r_1 - 1)\,s_1\alpha + 2t^2 > 2\alpha + 1,$$

la seule combinaison

$$(9) \qquad r_1 = s_1 = t = 1$$

exclue, mais les valeurs spéciales (9) appartiennent à l'hypothèse (7).

Reste encore le cas spécial $t = r$, ce qui donnera, en vertu de (8),

$$\omega = 2rs\alpha + s^2 - 2r^2 > 2\alpha + 1,$$

la seule combinaison

$$(10) \qquad r = s = 1$$

exclue.

Quant aux valeurs (7), il résulte

$$\omega = (t^2 - 1)\,\alpha^2 + 2t^2 + 2s\alpha - 1 > 2\alpha + 1,$$

les valeurs spéciales

(11) $$s = t = 1$$

exclues.

Étudions maintenant les hypothèses (9), (10), (11), nous trouvons précisément les valeurs $\omega = 2\alpha \pm 1$, et nous aurons évidemment toujours

$$a - 1 = \alpha^2 + 1 > 2\alpha + 1.$$

Cela posé, la démonstration précédente donnera immédiatement cette autre proposition:

II. Les équations résolubles de la forme

$$u^2 - (\alpha^2+2)v^2 = 2\alpha+1, \quad u^2 - (\alpha^2+2)v^2 = -2\alpha+1$$

sont toujours du genre 2.

Quant à la base

$$a = \alpha^2 - 2,$$

le même procédé donnera la proposition, analogue aux précédentes:

III. La plus petite valeur impaire de ω, pour laquelle l'équation de Lagrange

(12) $$u^2 - (\alpha^2 - 2)v^2 = (-1)^\delta \omega$$

soit résoluble, est

(13) $$\omega = 2\alpha - 3,$$

et l'équation correspondante (12) est toujours du genre 2.

On voit que le paramètre (13) correspond à la solution primitive

(14) $$u = \alpha + 1, \quad v = 1,$$

tandis que la solution

(15) $$u = \alpha - 1, \quad v = 1$$

donnera

(15 bis) $$\omega = 2\alpha + 3,$$

paramètre qui est toujours applicable.

VIII. Remarques sur les résultats précédents.

Il nous semble utile de comparer les résultats que nous venons d'obtenir concernant la limite inférieure du paramètre ω dans certaines équations de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta \omega. \tag{1}$$

A cet effet, considérons tout d'abord la base

$$a_1 = \alpha(4\alpha + 1), \tag{2}$$

nous savons que l'équation (1), qui correspond à cette base, n'est jamais résoluble, à moins que

$$\omega \geqq 3\alpha + 1. \tag{3}$$

Multiplions maintenant par 4 le nombre a_1, de sorte qu'il s'agit de la base

$$a_2 = 4\alpha(4\alpha + 1), \tag{4}$$

la limite inférieure du paramètre ω s'augmente à

$$\omega \geqq 8\alpha - 1. \tag{5}$$

Ajoutons ensuite à la base a_2 le facteur 4, ce qui conduira à la base

$$a_3 = (8\alpha + 1)^2 - 1, \tag{6}$$

l'équation correspondante de Lagrange n'est jamais résoluble à moins que

$$\omega \geqq 32\alpha - 1. \tag{7}$$

Cela posé, il est évident que les trois transformations susdites ont élevé la valeur minimum du paramètre ω de $3\alpha + 1$ jusqu'à $32\alpha - 1$.

Considérons maintenant la base

$$a_1 = \alpha^2 + 1, \tag{8}$$

l'équation correspondante (1) n'est jamais résoluble, à moins que

(9) $$\omega \geq 2\alpha .$$

Ajoutons ensuite au nombre a_1 le facteur α^2, ce qui conduira à la base

(10) $$a_2 = \alpha^2(\alpha^2+1),$$

et l'équation (1) est irrésoluble, à moins que

(11) $$\omega > 3\alpha^2-1,$$

tandis que la base

(12) $$a_3 = 4\alpha^2(\alpha^2+1) = (2\alpha^2+1)^2-1$$

exige

(13) $$\omega \geqq 8\alpha^2-4,$$

de sorte que l'adjonction du facteur $4\alpha^2$ à la base a élevé la valeur minimum du paramètre ω de 2α jusqu'à $8\alpha^2-4$.

Quant à la base

(14) $$a_1 = \alpha^2+2,$$

nous aurons

(15) $$\omega \geqq 2\alpha-1,$$

tandis que la base

(16) $$a_2 = \alpha^2(\alpha^2+2) = (\alpha^2+1)^2-1$$

exige

(17) $$\omega \geqq 4\alpha^2-1.$$

De même, l'équation (1) qui correspond à la base

(18) $$a_1 = \alpha^2-2$$

n'est jamais résoluble, à moins que

(19) $$\omega \geqq 2\alpha-3,$$

tandis que l'on aura, pour la base

(21) $$a_2 = \alpha^2(\alpha^2-2) = (\alpha^2-1)^2-1,$$

la valeur minimum

(22) $$\omega \geqq 4\alpha^2-9.$$

Ces observations faites, il est évident que chacune des transformations susdites de la base diminuent le nombre

des équations résolubles, parce qu'elles excluent nécessairement certains paramètres applicables pour la base a, prise pour point de départ.

Mais, chose plus grave, une telle exclusion de certains nombres premiers comme paramètres applicables, dans l'équation de Lagrange en question, entraîne nécessairement que d'autres nombres premiers deviennent aussi inapplicables, comme le montrent clairement les tables numériques jointes au présent Mémoire.

Dans l'article XII, nous aurons du reste à revenir à ce problème difficile.

TROISIÈME PARTIE

Solutions avec un nombre commun.

IX. Les solutions (s, v) et (u, v).

Les solutions singulières, étudiées dans les articles II et IV, conduiront naturellement à étudier plus amplement deux solutions (s, t) et (u, v) de l'équation de LAGRANGE

$$u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta \omega, \tag{1}$$

savoir

$$s^2 - at^2 = (-1)^\lambda \omega, \quad u^2 - av^2 = (-1)^\mu \omega, \tag{2}$$

pour lesquelles on aura une des égalités $s = u$ ou $t = v$.

A cet effet, étudions tout d'abord l'égalité

$$t = v,$$

de sorte qu'il s'agit des équations

$$s^2 - av^2 = (-1)^\lambda \omega, \quad u^2 - av^2 = (-1)^\mu \omega, \tag{3}$$

il est facile de démontrer le théorème:

I. La condition suffisante et nécessaire pour la résolubilité simultanée des deux équations (3) est, que la base a soit une somme de deux carrés, premiers entre eux, savoir

$$a = p^2 + q^2. \tag{4}$$

On aura, en soustrayant les deux équations (3),

$$s^2 - u^2 = \left((-1)^\lambda - (-1)^\mu\right)\omega,$$

de sorte que les exposants λ et μ sont nécessairement de différente parité, donc les équations (3) se présentent sous la forme

$$s^2 - a v^2 = \omega, \quad u^2 - a v^2 = -\omega, \tag{5}$$

ce qui n'est possible, à moins que la base a ne soit une somme de deux carrés premiers entre eux.

Posons ensuite

$$s = \alpha + \beta, \quad u = \alpha - \beta, \tag{6}$$

il résulte, en vertu de (3) et (5),

$$\alpha^2 + \beta^2 = a v^2, \quad \omega = 2\alpha\beta, \tag{7}$$

ce qui montre que la condition nécessaire susdite est suffisante aussi.

En effet, posons

$$v = r^2 + s^2, \tag{8}$$

où r et s sont premiers entre eux, les formules (7) déterminent α, β et ω, ce qui donnera, en vertu de (6), les deux inconnues s et u.

Quant aux solutions ainsi trouvées, nous avons encore à démontrer le théorème curieux:

II. Supposons que les solutions (s, v) et (u, v) appartiennent à deux suites coordonnées, il faut et il suffit que a soit une base impaire de première espèce et que

$$\omega = 2A_{2r+1}, \quad s = A_{2r+1} + 1, \quad u = A_{2r+1} - 1, \quad v = B_{2r+1}, \tag{9}$$

où nous avons posé, quel que soit l'indice m,

$$A_m^2 - a B_m^2 = (-1)^m. \tag{10}$$

Partons des formules fondamentales de la théorie des suites coordonnées, nous aurons

$$su + a v^2 = \omega A_n, \quad (s+u) v = \omega B_n,$$

où n désigne un indice convenablement choisi, ce qui donnera, en vertu de (6) et la dernière des formules (7),

$$v = \beta B_n ,$$

de sorte que la première des formules (7) se présente sous la forme

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha \beta^2 B_n^2 .$$

Or, α et β étant nécessairement premiers entre eux, parce qu'un facteur commun de α et β divise à la fois s, u et ω, on aura

$$\beta = 1 ,$$

d'où il résulte

$$v = B_n , \quad \alpha^2 - a B_n^2 = -1 ,$$

de sorte que n est un nombre impair, savoir

$$n = 2r + 1 ,$$

et l'on aura finalement les expressions indiquées dans les formules (9), ce qui conduira précisément à l'équation étudiée dans les articles II et IV.

X. Les solutions (s, t) et (s, v).

Étudions maintenant l'égalité

$$s = u ,$$

ce qui conduira aux équations simultanées

(1) $$s^2 - a t^2 = (-1)^\lambda \omega , \quad s^2 - a v^2 = (-1)^\mu \omega ,$$

et nous avons à démontrer la proposition:

I. La condition suffisante et nécessaire pour la résolubilité simultanée des deux équations (1) est que $a = 2$, et que

(2) $$s^2 = t^2 + v^2 .$$

En effet, soustrayons les deux équations (1), nous aurons

$$a(t^2 - v^2) = \left((-1)^\mu - (-1)^\lambda\right)\omega ,$$

ce qui donnera nécessairement

$$\lambda = \mu + 1,$$

de sorte qu'il résulte

$$a(t^2 - v^2) = (-1)^{\mu} 2\omega, \tag{3}$$

et cette équation n'est possible, à moins que

$$a = 2, \tag{4}$$

car a et ω sont premiers entre eux.

Cela posé, additionnons les deux équations (1), nous aurons la formule (2), ce qui donnera

$$s = p^2 + q^2, \quad t = p^2 - q^2, \quad v = 2pq \tag{5}$$

ou

$$s = p^2 + q^2, \quad t = 2pq, \quad v = p^2 - q^2, \tag{5 bis}$$

où $p > q$, et où p et q sont premiers entre eux et de parité différente.

Quant à la valeur correspondante de ω, on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} (-1)^{\mu}\omega = p^4 + q^4 - 6p^2q^2 = \\ = (p^2 - q^2 + 2pq)(p^2 - q^2 - 2pq). \end{array} \right. \tag{6}$$

Déterminons maintenant les deux solutions (s, t) et (s, v), ainsi trouvées, de sorte qu'elles appartiennent à deux suites coordonnées.

A cet effet, posons, quel que soit l'indice n,

$$A_n^2 - 2B_n^2 = (-1)^n, \tag{7}$$

nous avons à démontrer cette autre proposition:

II. Les solutions (s, t) et (s, v) qui appartiennent à deux suites coordonnées se présentent sous la forme

$$s = B_{2r+1}, \quad t = A_r A_{r+1}, \quad v = 2B_r B_{r+1}, \tag{8}$$

où r et l'indice μ qui figure dans l'équation (3) sont de même parité, tandis que l'on aura

(9) $$\omega = A_{2r+1}.$$

En effet, les formules fondamentales de la théorie des suites réciproques donnent ici

$$s(t+v) = \omega B_n,$$

où n est un indice convenablement choisi, ce qui donnera

$$B_n = s\beta, \quad t+v = \beta\omega,$$

car s et ω sont premiers entre eux.

De plus, il résulte, en vertu de la formule (3),

$$t^2 - v^2 = (-1)^r \omega,$$

de sorte que l'on aura

$$\beta(t-v) = (-1)^r,$$

ce qui n'est possible, à moins que

$$\beta = 1, \quad t-v = (-1)^r,$$

et l'on aura donc finalement, en vertu de (5) et (6),

(10) $$s = B_n, \quad \omega = p^2 - q^2 + 2pq, \quad p^2 - q^2 - 2pq = (-1)^\mu.$$

Cela posé, la dernière de ces équations donnera

$$p = q + \sqrt{2q^2 + (-1)^\mu},$$

et le nombre qui figure sous le signe radical étant nécessairement un carré exact, il résulte, en vertu de (7) et (10),

$$q = B_r, \quad p = A_r + B_r, \quad s = B_r^2 + B_{r+1}^2,$$

où les indices r et μ sont de même parité. Appliquons ensuite les formules bien connues concernant les nombres A_r et B_r, nous aurons

(11) $$q = B_r, \quad p = B_{r+1}, \quad s = B_{2r-1},$$

ce qui donnera ensuite

(12) $$\begin{cases} v = 2B_r B_{r+1} \\ t = A_r A_{r+1}. \end{cases}$$

Quant au paramètre ω, on aura, en vertu de (10),

$$\omega = A_r A_{r+1} + 2B_r B_{r+1} = t^2 + 2pq,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\omega = A_{2r+1},$$

de sorte que l'équation en question se présente sous la forme

(13) $$u^2 - 2v^2 = \pm A_{2r+1},$$

où r est un positif entier quelconque.

XI. Sur l'équation $u^2 - 2v^2 = \pm A_{2r+1}$.

Nous avons encore à étudier un peu plus amplement l'équation (13) de l'article précédent, savoir

(1) $$u^2 - 2v^2 = \pm A_{2r+1}.$$

A cet effet, remarquons tout d'abord que cette équation est parfaitement décomposable, de sorte qu'elle est précisément du rang 2^μ, où μ désigne le nombre des facteurs premiers de A_{2r+1}, remarque qui nous conduira à la proposition curieuse:

I. Soit ν le nombre des facteurs premiers de l'indice $2r+1$, l'équation (1) est au moins du genre $2^{\nu+1}$.

En effet, désignons par

$$p_1, p_2, \ldots, p_\nu$$

les ν facteurs premiers de $2r+1$, puis remarquons que tous ces nombres sont impairs, nous aurons

$$A_{2r+1} = K A_{p_1} A_{p_2} \ldots A_{p_\nu},$$

où $K > 1$ contient au moins un facteur premier différent des nombres p_s; c'est-à-dire que A_{2r+1} contient au moins

$r+1$ facteurs premiers inégaux, donc l'équation (1) est au moins du genre 2^{r+1}.

Cela posé, nous avons à déterminer les éléments généraux des deux suites coordonnées

$$(2)\quad \begin{cases} (u_1,\ v_1),\ (u_2,\ v_2),\ \ldots,\ (u_n,\ v_n),\ \ldots, \\ (u'_1,\ v'_1),\ (u'_2,\ v'_2),\ \ldots,\ (u'_n,\ v'_n),\ \ldots, \end{cases}$$

auxquelles appartiennent les solutions $(s,\ t)$ et $(s,\ v)$.

Partons, à cet effet, des deux formules bien connues

$$A_{2r+1} = A_{r+1}^2 - A_r^2 + (-1)^r = 2B_{r+1}^2 - 2B_r^2 - (-1)^r,$$

nous aurons immédiatement ces deux autres formules

$$(3)\qquad A_{r+1}^2 - 2B_r^2 = A_{2r+1},\quad A_r^2 - 2B_{r+1}^2 = -A_{2r+1},$$

ce qui donnera les deux solutions $(A_{r+1},\ B_r)$ et $(A_r,\ B_{r+1})$ de l'équation (1).

Appliquons ensuite l'inégalité

$$A_r < B_{r+1},$$

il est évident que $(A_r,\ B_{r+1})$ est la solution primitive des deux suites coordonnées (2), de sorte que nous aurons par exemple

$$(4)\qquad u_1 = A_r,\quad v_1 = B_{r+1} = A_r + B_r.$$

Et, je dis que nous aurons de même

$$(5)\qquad u'_1 = A_{r+1} = A_r + 2B_r,\quad v'_1 = B_r,$$

ce qui est une conséquence immédiate des formules

$$A_r A_{r+1} + 2B_r B_{r+1} = A_{2r+1}$$
$$A_{r+1} B_{r+1} + A_r B_r = A_{2r+1},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$u_1 u_1' + 2 v_1 v_1' = A_{2r+1} A_1$$
$$u_1 v_1' + v_1 u_1' = A_{2r+1} B_1 ,$$

savoir les formules fondamentales de la théorie des suites coordonnées.

Cela posé, les formules récursives de Lagrange donnent immédiatement, en vertu de (4) et (5), les expressions générales

$$(6) \qquad u_s = A_r A_s + 2 B_r B_{s-1}, \quad v_s = A_r B_s = B_r A_{s-1}$$
$$(7) \qquad u_s' = A_r A_{s-1} + 2 B_r B_s, \quad v_s' = A_r B_{s-1} + A_r A_s ,$$

et nous aurons, après un calcul simple,

$$(8) \qquad u_{r+1} = u_{r+1}' = B_{2r+1}.$$

Quant aux valeurs correspondantes

$$v_{r+1}, \quad v_{r+1}' ,$$

elles seront, en vertu de la formule (8) de l'article précédent,

$$A_r A_{r+1}, \quad 2 B_r B_{r+1}.$$

Or, nous aurons

$$A_r A_{r+1} - 2 B_r B_{r+1} = (-1)^r$$
$$u_{r+1}^2 - 2 v_{r+1}^2 = (-1)^r A_{2r+1} ,$$

ce qui donnera

$$(9) \qquad v_{r+1} = 2 B_r B_{r+1}, \quad v_{r+1}' = A_r A_{r+1}.$$

Soit par exemple $r = 4$, on aura

$$A_9 = 1393 = 7 \cdot 199, \quad B_9 = 685 ,$$

de sorte que les cinq premiers éléments des deux suites coordonnées appartenant à l'équation

$$(10) \qquad u^2 - 2 v^2 = \pm 1393$$

deviennent

(41, 12), (65, 53), (171, 118), (407, 289), (995, 696)
(17, 29), (75, 46), (167, 121), (409, 288), (985, 697).

L'équation (10), étant du genre 4, admet encore deux autres suites coordonnées, dont les cinq premiers éléments sont

(23, 31), (85, 54), (193, 139), (471, 332), (1135, 803)
(39, 8), (55, 47), (149, 102), (553, 251), (855, 604).

QUATRIÈME PARTIE

Sur la hauteur d'un nombre premier.

XII. Applications de certaines bases spéciales.

Les tables numériques jointes au présent Mémoire exigent des éclaircissements sur la hauteur d'un nombre premier, par rapport à une base donnée.

En me réservant de revenir à ce problème, je me bornerai ici à développer les conséquences immédiates des recherches précédentes concernant certaines bases de formes spéciales, recherches que j'ai établies seulement parce que les résultats ainsi obtenus sont indispensables pour le calcul des tables numériques en question.

Soit a un nombre de la forme $8r+5$, nous disons pour abréger que a est une base $8r+5$ de première ou de seconde classe, selon que l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta 4$$

soit résoluble ou non. Et, cette définition adoptée, il est facile de démontrer les deux propositions suivantes:

I. Supposons résoluble l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta 4p^r, \tag{1}$$

où a est une base $8r+5$ de seconde classe, tandis que p est un nombre premier impair, p est, par rapport à la base a, de la hauteur $3r$.

En effet, l'opération itérative du troisième ordre conduira, en vertu de (1), à l'équation résoluble

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\vartheta} p^{3r},$$

de sorte que la hauteur ϱ du nombre premier p, par rapport à la base a, est diviseur de $3r$, ce qui donnera nécessairement $\varrho = 3r$, parce que l'équation n'est pas décomposable, de sorte que l'hypothèse $\varrho = r$ est exclue.

II. Le nombre premier impair p est de la hauteur $3r$, par rapport à la base

(2) $$a = 4p^{2r} + 1.$$

Remarquons que a est une base $8\nu + 5$ de seconde classe et que l'équation

$$u^2 - av^2 = \pm 4p^r$$

est résoluble, la proposition II est une conséquence immédiate de I.

On voit que cette dernière proposition explique la table concernant la base 101, obtenue de (2) en y posant

$$p = 5, \quad r = 1.$$

Quant à la base $82 = 3^4 + 1$, nous avons à démontrer cette autre proposition:

III. Le nombre premier impair p est, par rapport à la base

(3) $$a = p^{2r} + 1,$$

de la hauteur $2r$.

Remarquons que l'équation

$$u^2 - av^2 = \pm p^{2r}$$

est toujours résoluble, ayant la solution (1, 1), tandis que cette autre équation

$$u^2 - av^2 = \pm p^r$$

est irrésoluble, il est évident que p est précisément de la hauteur $2r$, par rapport à la base a.

Remarquons ensuite que les bases 34 et 79 sont toutes deux de la forme

$$a = 9\alpha^2 - 2, \tag{4}$$

et que cette base admet les paramètres minimums

$$\omega_1 = 6\alpha - 3, \quad \omega_2 = 6\alpha + 3, \tag{5}$$

puis désignons par h la hauteur du nombre premier 3, par rapport à la base a, nous aurons le tableau

α	a	ω_1	ω_2	h
1	7	3	9	1
2	34	9	15	2
3	79	15	21	3
4	142	21	27	3
5	223	27	33	3
6	322	33	39	4

car les bases 79 et 322 donnent respectivement

$$17^2 - 79 \cdot 2^2 = -27, \quad 37^2 - 322 \cdot 2^2 = 81.$$

Au reste, il est facile de démontrer la proposition:

IV. Supposons

$$\alpha > \frac{3^n + 3}{2}, \tag{6}$$

la hauteur du nombre premier 3, par rapport à la base

$$a = 6\alpha^2 - 2, \tag{7}$$

est au moins égale à $n+1$.

On aura, en effet, en vertu de (6),

$$2\alpha - 3 > 3^n;$$

c'est-à-dire que 3^n et toutes les puissances inférieures de 3 sont exclues, comme paramètres des équations de Lagrange qui correspondent à la base (7).

Quant aux bases de la forme $\alpha^2 + 2$ ou $\alpha^2 - 1$, remar-

quons que le nombre premier 5 est de la hauteur 2, par rapport aux bases

$$146 = 12^2 + 2, \quad 24 = 5^2 - 1,$$

mais de la hauteur 4 par rapport à la base

$$99 = 10^2 - 1,$$

car nous aurons

$$7^2 - 99 \cdot 1^2 = -50, \quad 47^2 - 99 \cdot 4^2 = 625,$$

et la base 99 n'admet pas le paramètre 2, de sorte que le paramètre 25 est aussi exclu.

Remarquons, en passant, que les nombres premiers

$$3 \quad 13 \quad 23$$

sont de la hauteur 4 par rapport à la base 2005[1], puis remarquons que les bases $a(\xi)$ et $a_1(\xi)$ que j'ai introduites, dans une autre publication récente[2], conduiront souvent au problème compliqué concernant la détermination de la hauteur d'un nombre premier.

Posons par exemple, dans la base spéciale de première espèce

$$a_1(\xi) = 25\xi^2 - 14\xi + 2,$$

$\xi = 12$, nous aurons

$$a_1(12) = 3434,$$

et, avec les significations de Degen, la fraction continue

$$\begin{matrix} 58 & 1 & (1 & 1) \\ 1\,' & 80\,' & (47\,' & 47)\,' \end{matrix}$$

Et les décompositions

$$3434 = 53^2 + 25^2 = 47^2 + 35^2,$$

montrent immédiatement que les nombres premiers

[1] Voir l'article XI de mon Mémoire: Recherches sur certaines équations de Lagrange de formes spéciales.

[2] Tidsskrift for Matematik, Aargang 1923, p. 61—65.

5 7

sont tous deux, par rapport à la base 3434, de la hauteur 4.

Cela posé, il est évident que le problème concernant la détermination des hauteurs des nombres premiers n'est pas borné aux bases susdites de formes spéciales, que nous venons d'étudier.

XIII. Remarques sur les hauteurs 2, 3, 4.

Dans ce qui suit, nous désignons par

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots\ldots,\ p_n,\ \ldots\ldots \tag{1}$$

des nombres premiers qui sont tous de la hauteur ϱ par rapport à une base a, où

$$\varrho = 2,\ 3,\ 4. \tag{2}$$

Ces définitions adoptées, nous savons que l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\delta} p_r p_s \tag{3}$$

est, pour $\varrho = 2$, du genre 4, et il est facile de démontrer que l'équation (3) est, pour $\varrho = 3,\ 4$, du genre 2.

En effet, supposons que l'équation (3) soit du genre 4, puis désignons par $(u_1,\ v_1)$ et $(u_2,\ v_2)$ deux solutions de cette équation, appartenant à chacun des couples de ses suites coordonnées, nous aurons, en multipliant les deux équations correspondantes, l'équation résoluble

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\varepsilon} p_r^2,$$

ce qui est impossible.

Cela posé, il est facile de démontrer la proposition curieuse:

I. Supposons que les nombres premiers impairs p_r et p_s soient tous deux, par rapport à la base a, de la hauteur 4, l'opération itérative du second

ordre conduira, de l'équation (3) du genre 2, à l'équation du genre 4

$$u^2 - av^2 = p_r^2 p_s^2. \tag{4}$$

Quant au genre de l'équation (4), multiplions cette équation par cette autre

$$u^2 - av^2 = (-1)^\varepsilon p_r^4,$$

il est évident que (4) est du genre 4.

Soient ensuite

$$p_\alpha \quad p_\beta \quad p_\gamma$$

trois nombres premiers impairs de la même hauteur ϱ, de sorte que les trois équations de la forme (3) sont résolubles, nous avons à démontrer les propositions:

II. Soit $\varrho = 2$ ou $\varrho = 4$, l'équation

$$u^2 - av^2 = (-1)^\varepsilon p_\alpha p_\beta p_\gamma \tag{5}$$

est toujours irrésoluble.

En effet, multiplions (5) par l'équation résoluble

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\varepsilon_1} p_\alpha p_\beta,$$

nous aurons une équation de la forme

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\varepsilon+\varepsilon_1} p_\beta^2 p_\gamma \tag{6}$$

ou de la forme

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\varepsilon+\varepsilon_1} p_\gamma, \tag{7}$$

et il est évident que cette dernière équation est irrésoluble.

Quant à l'équation (6), elle est certainement irrésoluble pour $\varrho = 2$, car cette valeur de ϱ conduira à l'équation (7). Soit ensuite $\varrho = 4$, l'opération itérative du second ordre conduira à cette autre équation irrésoluble

$$u^2 - av^2 = p_\gamma^2.$$

Étudions maintenant la hauteur $\varrho = 3$, il est facile de démontrer cette autre proposition:

III. Supposons qu'aucun des exposants r, s, t ne soit multiple de 3, l'équation de Lagrange

$$u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta p_\alpha^r p_\beta^s p_\gamma^t \tag{8}$$

est résoluble et du genre 2.

Remarquons tout d'abord que nous pouvons nous borner à étudier l'équation (8) qui correspond à

$$r = s = t = 1, \tag{9}$$

parce que les trois équations aux paramètres

$$p_\alpha^3 \quad p_\beta^3 \quad p_\gamma^3$$

sont résolubles.

Multiplions ensuite les deux équations résolubles

$$u^2 - av^2 = (-1)^\epsilon p_\alpha p_\beta, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\epsilon_1} p_\alpha p_\gamma,$$

nous aurons cette autre équation résoluble

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\epsilon+\epsilon_1} p_\alpha^2 p_\beta p_\gamma,$$

de sorte que l'équation (8) qui correspond aux exposants (9) est certainement résoluble.

Cela posé, nous avons encore à démontrer que l'équation résoluble

$$u^2 - av^2 = (-1)^\vartheta p_\alpha p_\beta p_\gamma \tag{10}$$

est toujours du genre 2.

A cet effet, supposons que (10) ait deux solutions (u_1, v_1) et (u_2, v_2) n'appartenant pas au même couple de suites coordonnées, puis multiplions les deux équations (10) correspondantes, il existe, pour

$$r = \alpha, \ \beta, \ \gamma,$$

un exposant ε_r, tel que

$$\begin{aligned} u_1 u_2 + (-1)^{\varepsilon_r} a v_1 v_2 &\equiv 0 \pmod{p_r} \\ u_1 v_2 + (-1)^{\varepsilon_r} u_2 v_1 &\equiv 0 \pmod{p_r}. \end{aligned}$$

Or, ε_r n'ayant que les deux valeurs 0 et 1, il existe un exposant ε_r, tel que

$$(11)\quad \begin{cases} u_1 u_2 + (-1)^{\varepsilon_r} a v_1 v_2 \equiv 0 \pmod{p_r p_s} \\ u_1 v_2 + (-1)^{\varepsilon_r} u_2 v_1 \equiv 0 \pmod{p_r p_s}, \end{cases}$$

de sorte que la multiplication susdite conduira à l'équation irrésoluble

$$u^2 - a v^2 = (-1)^{\vartheta_1} p_t^2 ;$$

c'est-à-dire que l'équation (10) est du genre 2.

XIV. Sur les bases 34, 79, 82, 101.

Il nous reste encore à donner quelques éclaircissements sur les quatre bases qui sont les fondements des tables numériques jointes au présent Mémoire.

A cet effet, remarquons tout d'abord que la forme quadratique

$$x^2 - 34 y^2$$

admet 79 diviseurs premiers inférieurs à 1000, savoir

3	5	11	29	37	47	61	89	103	107	109
127	131	137	139	151	163	173	181	191	197	211
223	227	239	257	263	269	271	277	281	283	317
347	353	359	379	383	397	409	419	433	457	463
541	547	569	571	577	593	599	619	631	643	647
653	677	683	691	709	727	761	769	787	811	821
827	853	863	877	907	919	937	941	947	953	967
977	997.									

Parmi ces 79 nombres 35 seulement sont applicables comme paramètres dans l'équation de Lagrange ayant la base 34, diviseurs premiers que nous désignons comme étant de la hauteur 1, savoir

47 89 103 127 137 151 191 223 239 257 263
271 281 353 359 383 409 433 457 463 569 577
593 599 631 647 727 761 769 863 919 937 953
967 977

Les 44 autres diviseurs premiers sont de la hauteur 2, savoir

3 5 11 29 37 61 107 109 131 139 163
173 181 197 211 227 269 277 283 317 347 379
397 419 541 547 571 619 643 653 677 683 691
709 787 811 821 827 853 877 907 941 947 997

Quant à la forme quadratiques

$$x^2 - 79y^2,$$

elle admet 80 diviseur premiers impairs, inférieurs à 1000, savoir

3 5 7 13 43 47 59 71 73 89 97
101 103 107 127 139 181 191 199 211 227 241
251 257 269 271 277 281 307 311 313 317 331
337 359 379 389 397 419 421 433 443 457 463
491 503 541 557 569 587 593 607 617 619 631
641 647 653 659 677 691 733 739 757 761 773
809 821 823 827 857 859 877 883 941 947 953
983 991 997

Parmi ces diviseurs 24 seulement sont de la hauteur 1, savoir

43 73 181 211 227 257 271 307 311 313 331
443 569 647 733 761 773 821 823 877 941 947
983 997

Les 56 diviseurs restants sont de la hauteur 3, savoir

3 5 7 13 47 59 71 89 97 101 103
107 127 139 191 199 241 251 269 277 281 317

337 359 379 389 397 419 421 433 457 463 491
503 541 557 587 593 607 617 619 631 641 653
659 677 691 739 757 809 827 857 859 883 953
991

De même, la forme quadratique

$$x^2 - 82y^2$$

a 74 diviseurs premiers inférieurs à 1000, savoir

3 11 13 19 23 29 31 53 67 73 101
103 109 113 127 149 157 179 181 211 223 227
229 241 271 293 317 331 337 347 353 359 367
397 401 409 421 431 433 449 487 499 509 547
557 563 569 571 587 599 607 617 631 643 647
659 683 691 709 743 757 761 769 773 827 857
863 881 883 911 953 971 983 997

Parmi ces diviseurs 15 seulement sont de la hauteur 1, savoir

73 103 113 223 359 401 449 487 569 617 631
647 743 761 769

19 diviseurs sont de la hauteur 2, savoir

23 31 127 241 271 337 353 367 409 431 433
599 607 857 863 881 911 953 983

Restent encore 40 diviseurs qui sont de la hauteur 4, savoir

3 11 13 19 29 53 67 101 109 149 157
179 181 211 227 229 293 317 331 347 397 421
499 509 547 557 563 571 587 643 659 683 691
709 757 773 827 883 971 997

Enfin, la forme quadratique

$$x^2 - 101\,y^2$$

a 75 diviseurs premiers, inférieurs à 1000, savoir

5	13	17	19	23	31	37	43	47	71	79
97	107	131	137	157	179	181	193	197	211	223
227	233	239	251	281	283	307	317	359	367	373
379	383	409	421	449	491	499	509	521	541	557
563	569	587	593	601	607	619	631	643	653	677
683	691	701	727	743	761	787	809	821	827	829
839	853	857	887	929	967	977	991	997		

23 seulement de ces diviseurs sont de la hauteur 1, savoir

37	43	97	179	223	233	283	379	383	409	509
557	593	653	683	691	761	809	821	827	839	853
887	991									

Les 52 autres diviseurs sont, au contraire, de la hauteur 3, savoir

5	13	17	19	23	31	47	71	79	107	131
137	157	181	193	197	211	227	239	251	281	307
317	359	367	373	421	449	491	499	521	541	563
569	587	601	607	619	631	643	677	701	727	743
787	829	857	929	967	977	997				

Nous avons encore à considérer la base de seconde espèce

$$2525 = 101 \cdot 25 = 43^2 + 26^2 = 37^2 + 34^2,$$

ayant les mêmes diviseurs premiers que la précédente, mais l'adjonction du facteur carré 25 introduit les deux autres hauteurs 2 et 6.

M. Rasch a démontré que 10 seulement des 75 diviseurs premiers susdits sont de la hauteur 1, savoir

179 379 409 509 691 761 809 821 839 991

tandis que 14 sont de la hauteur 2, savoir

37 43 97 223 233 283 383 557 593 653 683 827 853 887

24 sont de la hauteur 3:

19 31 71 79 131 181 211 239 251 281 359 421 449 491 499 521 541 569 601 619 631 701 829 929

Restent encore 27 diviseurs premiers qui sont de la hauteur 6, savoir

5 13 17 23 47 107 137 157 193 197 227 307 317 367 373 563 587 607 643 677 727 743 787 857 967 977 997

Les tables numériques qui suivent concernant les bases susdites et quelques autres qui s'y rattachent sont calculées par moi, revues et corrigées par M. Rasch.

Quant à ces tables, il nous semble nécessaire de donner certains éclaircissements et sur la nature des bases en question et sur le contenu des tables.

A cet effet, remarquons tout d'abord que

$$34 = 6^2 - 2$$

est la plus petite base de seconde espèce qui soit une somme de deux carrés premiers entre eux, savoir

$$34 = 5^2 + 3^2,$$

et que nous aurons, pour la plus petite solution de l'équation de Fermat correspondante,

$$A_1 = 35 \quad B_1 = 6,$$

ce que nous désignons par le symbole

$$34\,(35,\ 6).$$

Cette signification adoptée, on aura de même les solutions

$$136\,(35,\ 3)\quad 306\,(35,\ 2)\quad 850\,(1449,\ 84).$$

La base de seconde espèce 850 est également la somme de deux carrés, premiers entre eux, savoir

$$850 = 29^2 + 3^2 = 27^2 + 11^2.$$

De plus, nous aurons

$$9 \cdot 136 = 1224 = 35^2 - 1.$$

Quant à la base

$$79 = 9^2 - 2,$$

on aura les solutions

$$79\,(80,\ 9)\quad 711\,(80,\ 3)\quad 6399\,(80,\ 1),$$

de sorte que

$$6399 = 80^2 - 1.$$

La table qui correspond à 79 est suppléée par les solutions qui correspondent aux paramètres $3p > 1000$, où $p < 1000$ est un diviseur premier de la hauteur 3.

La base

$$82 = 9^2 + 1$$

donnera de même les solutions

$$82\,(9,\ 1)\quad 738\,(163,\ 6)\quad 6642\,(163,\ 2),$$

et l'on aura donc

$$26568 = 163^2 - 1.$$

La table de 82 est suppléée par les solutions qui correspondent aux paramètres $3p > 1000$ ou $9p > 1000$, $p < 1000$ étant un diviseur premier de la hauteur 2 respectivement de la hauteur 4.

Quant à la dernière base

$$101 = 10^2 + 1,$$

on aura les solutions

$$101\,(10,\,1)\quad 404\,(201,\,10)\quad 2525\,(201,\,4),$$

donc

$$40400 = 201^2 - 1.$$

Remarquons, en passant, que la base

$$2525 = 43^2 + 26^2 = 37^2 + 34^2$$

est de seconde espèce.

La table de 101 est suppléée par les solutions qui correspondent aux paramètres $4p > 1000$, où $p < 1000$ est un diviseur premier de la hauteur 3.

Dans toutes les tables, j'ai marqué par un astérisque les paramètres qui donnent une équation du genre 4, par deux astérisques ceux qui correspondent au genre 8.

TABLES NUMÉRIQUES

Table I.

Les bases 34 306 850.

34

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
−9	5	1	15 *	7	1	−15 *	11	2
−25	3	1	−33 *	1	1	33 *	13	2
47	9	1	−55 *	9	2	55 *	19	3
81	25	4	87 *	11	1	−87 *	7	2
89	15	2	−103	21	4	−111 *	5	2
111 *	31	5	−121	27	5	−127	3	2
−135 *	1	2	135 *	13	1	−137	13	3
145 *	37	6	−145 *	67	11	−151	45	8
−183 *	19	4	183 *	43	7	−185 *	11	3
185 *	27	4	191	15	1	223	23	3
225 *	49	8	225 *	19	2	239	33	5
−257	7	3	−263	31	6	271	55	9
−281	5	3	297 *	29	4	−297 *	37	7
−305 *	1	3	305 *	21	2	−319 *	15	4
319 *	25	3	321 *	61	10	−321 *	23	5
327 *	19	1	−327 *	43	8	−353	49	9
359	45	7	−375 *	13	4	375 *	67	11
−383	29	6	393 *	23	2	−393 *	61	11
407 *	31	1	−407 *	67	12	−409	21	5
417 *	31	4	−417 *	73	13	−423 *	11	4

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
−423 *	79	14	433	73	12	457	41	6
−463	9	4	−489 *	19	5	489 *	25	2
−495 **	7	4	−495 **	41	8	495 **	23	1
495 **	79	13	−519 *	5	4	519 *	37	5
535 *	29	3	−535 *	3	4	−543 *	1	4
543 *	47	7	545 *	33	4	−545 *	47	9
569	63	10	−577	33	7	591 *	25	1
−591 *	53	10	593	27	2	−599	25	6
625	43	6	631	91	15	633 *	53	8
−633 *	59	11	647	69	11	655 *	31	3
−655 *	39	8	671 *	39	5	−671 *	65	12
681 *	35	4	−681 *	13	5	695 *	27	1
−695 *	23	6	705 *	29	2	−705 *	31	7
727	59	9	−729	11	5	−761	83	15
−769	9	5	−783 *	89	16	783 *	103	17
−801 *	7	5	−801 *	95	17	−807 *	37	8
807 *	29	1	815 *	81	13	−815 *	101	18
825 **	31	2	825 **	37	4	−825 **	29	7
−825**	107	19	831 *	41	5	−831 *	113	20
−841	3	5	−849 *	1	5	849 *	55	8
−863	19	6	−865 *	57	11	865 *	109	18
905 *	87	14	−905 *	43	9	919	35	3
927 *	31	1	927 *	71	11	−937	27	7
−951 *	35	8	951 *	115	19	953	33	2
967	61	9	977	39	4	−985 *	69	13
985 *	47	6	999 *	43	5	−999 *	49	10

136

−15	11	1	33	13	1	−55	9	1
81	25	2	−87	7	1	89	15	1
−103	21	2	−111	5	1	−127	3	1

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
−135	1	1	145	37	3	−151	45	4
−183	19	2	185	27	2	225 *	49	4
225 *	19	1	−263	31	3	297	29	2
305	21	1	−319	15	2	−327	43	4
−375	13	2	−383	29	3	393	23	1
−407	67	6	417	31	2	−423 *	11	2
−423 *	79	7	433	73	6	457	41	3
−463	9	2	489	25	1	−495 *	7	2
−495 *	41	4	−519	5	2	−535	3	2
−543	1	2	545	33	2	569	63	5
−591	53	5	593	27	1	−599	25	3
625	43	3	633	53	4	−655	39	4
−671	65	6	681	35	2	−695	23	3
705	29	1	−783	89	8	−807	37	4
−815	101	9	825 *	31	1	825 *	37	2
−831	113	10	849	55	4	−863	19	3
865	109	9	905	87	7	−951	35	4
953	33	1	977	39	2	985	47	3
−999	49	5						

306

55	19	1	−137	13	1	145	37	2
−185	11	1	223	23	1	−257	7	1
−263	31	2	271	55	3	−281	5	1
−305	1	1	319	25	1	−353	49	3
−383	29	2	−407	67	4	433	73	4
457	41	2	535	29	1	−545	47	3
−599	25	2	625	43	2	631	91	5
655	31	1	−671	65	4	−695	23	2
727	59	3	−761	83	5	−815	101	6
−863	19	2	865	109	6	−905	43	3
919	35	1	967	61	3	985	47	2

1224

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
145	37	1	−263	31	1	−383	29	1
−407	67	2	433	73	2	457	41	1
−599	25	1	625	43	1	−671	65	2
−695	23	1	−815	101	3	−863	19	1
865	109	3	985	47	1			

850

−9	29	1	81	59	2	89	117	4
111 *	31	1	−111 *	233	8	−121	27	1
−151	57	2	191	321	11	239	33	1
271	89	3	−281	437	15	−319 *	291	10
319 *	263	9	359	149	5	−409	21	1
−489 *	19	1	489 *	467	16	−519 *	641	22
519 *	37	1	569	63	2	−591 *	53	2
591 *	671	23	−599	349	12	631	91	3
671 *	39	1	−671 *	173	6	−681 *	13	1
681 *	409	14	−729	11	1	−761	83	3
−769	9	1	−801 *	7	1	−801 *	143	5
831 *	41	1	−831 *	113	4	−841	3	1
−849 *	1	1	849 *	293	10	919	613	21
951 *	149	5	−951 *	407	14	999 *	43	1
−999 *	49	2						

3400

81	59	1	89	117	2	−111	233	4
−151	57	1	−319	291	5	489	467	8
−519	641	11	569	63	1	−591	53	1
−599	349	6	−671	173	3	681	409	7
−831	113	2	849	293	5	−951	407	7
−999	49	1						

7650

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
271	89	1	−281	437	5	319	263	3
−599	349	4	631	91	1	−671	73	2
−761	83	1	919	613	7			

13600

89	117	1	−111	223	2	489	467	4
−599	349	3	−851	113	1			

30600

−599	349	2	−671	173	1

122400

−599	349	1

Table II.

Les bases 79 711 6399.

79

2	9	1	−15	8	1	21	10	1
−27	17	2	−30	7	1	−35	26	3
−39	35	4	42	11	1	−43	6	1
45	19	2	−54	5	1	−63	4	1
65	12	1	−70	3	1	73	28	3
−75	2	1	−78	1	1	−86	25	3
90	13	1	−91	15	2	105	37	4
117	14	1	125	21	2	−126	43	5
130	29	3	141	46	5	146	15	1
−147	13	2	−150	61	7	−175	33	4
177	16	1	181	55	6	−182	23	3
−195	11	2	210	17	1	−211	42	5
213	23	2	225	64	7	−227	22	3
234	47	5	−235	9	2	245	18	1
250	31	3	257	39	4	−267	7	2

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
−271	60	7	273	73	8	282	19	1
−291	5	2	−294	41	5	−295	69	8
−303	31	4	−307	3	2	309	25	2
−311	20	3	313	32	3	−315	1	2
321	20	1	325	82	9	329	48	5
−331	87	10	−343	96	11	−350	19	3
354	65	7	−355	114	13	362	21	1
381	91	10	−390	59	7	405	22	1
413	27	2	417	41	4	−422	17	3
−423	29	4	441	100	11	−443	49	6
445	34	3	450	23	1	−454	39	5
−455	16	3	−470	77	9	485	66	7
490	83	9	497	24	1	505	109	12
−507	58	7	514	35	3	−515	14	3
525	29	2	−531	38	5	−534	95	11
−535	27	4	−542	13	3	546	25	1
−567	67	8	569	75	8	573	118	13
−582	113	13	585	43	4	−590	11	3
597	26	1	−606	37	5	−611	10	3
−614	131	15	618	67	7	−622	57	7
−623	76	9	626	51	5	−630	149	17
−635	47	6	637	59	6	−639	25	4
642	101	11	645 *	31	2	645 *	127	14
−647	8	3	650	27	1	658	37	3
−662	7	3	−679	36	5	−686	5	3
−695	4	3	705	28	1	−707	2	3
−710	1	3	721	136	15	−723	94	11
729	52	5	733	38	3	−735	23	4
749	93	10	753	68	7	761	45	4
767	29	1	−767	103	12	773	33	2
801	145	16	−807	112	13	810	119	13

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
−819	34	5	821	30	1	−823	21	4
826	85	9	−831	65	8	834	53	5
−843	121	14	845	102	11	−846	55	7
873	77	8	877	61	6	882	31	1
885	154	17	−886	33	5	889	40	3
890	69	7	−903	19	4	909	35	2
−910	93	11	−923	74	9	−927	128	17
941	54	5	945 *	32	1	945 *	47	4
−947	157	18	−951	32	5	−955	54	7
−963	166	19	970	41	3	973	163	18
−975	17	4	−983	184	21	−987	193	22
994	137	15	−995	43	6	997	86	9
−1011	83	10	1077	34	1	1137	49	4
−1167	52	7	−1191	28	5	1257	104	11
−1263	1	4	−1299	26	5	−1371	50	7
1389	58	5	1473	208	23	1509	97	10
−1623	164	19	−1671	173	20	1761	55	4
−1779	14	5	1821	235	26	−1851	218	25
1857	44	1	1893	47	2	−1923	254	29
−1959	4	5	1977	149	16	−2031	55	8
2073	253	28	2217	59	4	−2271	40	7
−2427	38	7	2481	280	31	−2571	73	10
2577	151	16	2649	68	5	−2859	71	10
−2973	203	22						
			711					
−35	26	1	73	28	1	− 86	25	1
130	29	1	181	55	2	−182	23	1
−227	22	1	250	31	1	−311	20	1
313	32	1	325	82	3	−350	19	1
−422	17	1	−443	49	2	445	34	1

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
−455	16	1	−470	77	3	490	83	3
505	109	4	514	35	1	−515	14	1
−542	13	1	−590	11	1	−611	10	1
−614	131	5	−623	76	3	−635	47	2
637	59	2	−647	8	1	658	37	1
−662	7	1	−686	5	1	−695	4	1
−707	2	1	−710	1	1	721	136	5
733	38	1	−767	103	4	826	85	3
877	61	2	889	40	1	−923	74	3
−947	157	6	970	41	1	973	163	6
−983	184	7	994	137	5	−995	43	2
997	86	3						

6399

325	82	1	−470	77	1	490	83	1
−623	76	1	826	85	1	−923	74	1
−947	157	2	973	162	2	997	86	1

Table III.

Les bases 82 738 6642.

82

−33	7	1	39	11	1	−57	5	1
−73	3	1	−81	1	1	87	13	1
−103	15	2	113	21	2	143	15	1
−159	13	2	201	23	2	207 *	17	1
−207 *	11	2	−209	23	3	223	31	3
−247	9	2	−279 *	7	2	279 *	19	1
297	25	2	−303	5	2	−319	3	2
−327	1	2	−351	31	4	359	21	1
369	41	4	−377	19	3	401	27	2
447	23	1	−449	17	3	−471	29	4
487	35	3	513	29	2	−529	39	5

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
537	43	4	543	25	1	−551	49	6
−569	13	3	−583	27	4	−617	11	3
631	37	3	633	31	2	647	27	1
−681	37	5	−687	25	4	−689	7	3
−713 *	5	3	713 *	45	4	−737	1	3
743	47	6	759 *	29	1	759 *	53	5
761	33	2	−769	57	7	−783	23	4
−871	21	4	879	31	1	897 *	35	2
897 *	47	4	−951	19	4	−961	33	5
−993	55	7						

1041	37	2	−1191	11	4	−1263	7	4
1497	53	4	1527	107	11	−1641	91	11
1671	61	5	−1689	19	5	1713	55	4
−1761	17	5	−1929	11	5	−1977	109	13
−2049	1	5	2073	49	2	2127	47	1
−2271	77	10	2319	49	1	2481	53	2
−2649	37	7	−2913	65	4	2991	71	5

−1143 *	13	4	1143 *	35	1	−2169 *	43	7
2169 *	59	4	−2439 *	53	8	2439 *	67	5
−3033 *	83	11	3033 *	91	8	−3177 *	29	7
3177 *	67	4	−3303 *	115	11	−3303 *	113	14
−3681 *	109	10	3681 *	109	10	−3879 *	37	8
3879 *	77	5	−3897 *	11	7	3897 *	65	2
−5391 *	53	10	5391 *	97	7	−5463 *	103	14
5463 *	139	13	−7713 *	47	11	7713 *	95	4
−7767 *	115	16	7767 *	133	13	−7929 *	77	13
7929 *	127	10	−8199 *	1	10	8199 *	91	1
−8577 *	145	19	8577 *	157	14	−8847 *	85	14
8847 *	137	11						

738

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
73	55	2	103	29	1	−113	25	1
−143	53	2	−209	23	1	223	31	1
247	83	3	319	137	5	−359	107	4
−377	19	1	−401	79	3	−449	17	1
487	35	1	529	59	3	−551	49	2
−569	13	1	583	85	3	−617	11	1
631	37	1	−647	161	6	−689	7	1
−713 *	5	1	−713 *	77	3	−737	1	1
743	47	2	−761	133	5	769	61	2
871	139	5	961	113	4			

6642

247	83	1	−401	79	1	529	59	1
583	85	1	−647	161	2	−713	77	1

26568

−647	161	1

Table IV.

Les bases 101 2525.

101

−20	9	1	−37	8	1	43	12	1
−52	7	1	−65	6	1	68	13	1
−76	5	1	−85	4	1	−92	3	1
95	14	1	−97	2	1	−100	1	1
−115	17	2	124	15	1	125	23	2
155	16	1	−179	15	2	188	17	1
221	25	2	223	18	1	−233	26	3
−235	13	2	247	34	3	260	19	1
−283	11	2	−284	25	3	299	20	1
316	35	3	−323	9	2	325	27	2
340	21	1	−355	7	2	−379	5	2

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
−380	23	3	383	22	1	−391	35	4
−395	3	2	−403	1	2	409	45	4
−425	22	3	428	23	1	437	29	2
460	37	3	475	24	1	−509	20	3
524	25	1	−527	33	4	535	38	3
−548	19	3	557	31	2	575	26	1
−589	44	5	593	47	4	−611	55	6
−620	17	3	628	27	1	−653	16	3
−655	31	4	−676	43	5	683	28	1
685	33	2	691	40	3	−713	14	3
724	57	5	−740 *	13	9	740 *	29	1
−761	42	5	772	41	3	−775	29	4
785	49	4	−788	11	3	799	30	1
−809	10	3	821	35	2	−827	53	6
839	58	5	−844	41	5	−845	8	3
−853	64	7	−860 *	7	3	860 *	31	1
−884	5	3	−887	27	4	−893	4	3
−905	2	3	−908	1	3	923	32	1
940	43	3	956	59	5	965	37	2
985	51	4	−991	25	4			
−1004	39	5	1124	35	1	−1228	61	7
1268	37	1	−1436	33	5	−1468	59	7
1492	49	3	−1684	29	5	−1796	27	5
1964	67	5	−1996	23	5	−2084	21	5
−2164	19	5	−2252	77	9	2276	85	7
−2348	51	7	−2404	11	5	2428	103	9
−2476	7	5	−2524	1	5	2572	59	3
2708	53	1	2804	73	5	2908	123	11
2972	89	7	3148	57	1	3316	65	3
3404	77	5	−3428	39	7	3716	79	5
−3868	63	1	3908	127	11	−3988	31	7

404

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
37	21	1	−43	19	1	65	41	2
85	61	3	−95	39	2	97	81	4
−115	17	1	125	23	1	−155	59	3
−179	15	1	221	25	1	−223	79	4
−233	43	2	−235	13	1	−247	37	2
−283	11	1	−299	99	5	−323	9	1
325	27	1	−355	7	1	−379	5	1
−383	119	6	−391	35	2	−395	3	1
−403	1	1	409	45	2	425	83	4
437	29	1	−475	139	7	509	103	5
−527	33	2	−535	77	4	557	31	1
−575	159	8	589	65	3	593	47	2
−611	55	3	653	143	7	−655	31	2
−683	179	9	685	33	1	−691	97	5
713	163	8	761	85	4	−775	29	2
785	49	2	−799	199	10	809	203	10
821	35	1	−827	53	3	−839	75	4
845	223	11	853	67	3	−887	27	2
893	263	13	905	283	14	−923	219	11
965	37	1	985	51	2	−991	25	2

1616

65	41	1	−95	39	1	97	81	2
−223	79	2	−233	43	1	−247	37	1
−383	119	3	−391	35	1	409	45	1
425	83	2	−527	33	1	−535	77	2
575	159	4	593	47	1	−655	31	1
713	163	4	761	85	2	−775	29	1
785	49	1	−799	199	5	809	203	5

$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v	$\pm\omega$	u	v
−839	75	2	−887	27	1	905	283	7
985	51	1	−991	25	1			

2525

76	51	1	−124	49	1	179	52	1
−221	48	1	284	53	1	−299	99	2
−316	47	1	379	152	3	391	54	1
−409	46	1	509	103	2	−524	149	3
−589	44	1	611	56	1	−676	43	1
−691	97	2	724	57	1	−761	42	1
−799	199	4	809	203	4	−821	148	3
839	58	1	−844	41	1	884	253	5
956	59	1	991	154	3			

10100

−299	99	1	509	103	1	−691	97	1
−799	199	2	809	203	2			

40400

−799	199	1	809	203	1

TABLE DES MATIERES

Pages

Avant-Propos 3

PREMIÈRE PARTIE

Applications des bases $\alpha^2 \pm 1$.

I. Théorème sur l'équation de Fermat 6
II. Applications aux bases de première espèce 8
III. Applications aux bases de seconde espèce 12
IV. Résolution générale des équations précédentes du genre 2 .. 18

DEUXIÈME PARTIE

Applications d'autres bases spéciales.

V. Sur la base $a = \alpha(\alpha + 1)$ 23
VI. Sur la base $a = \alpha(4\alpha + 1)$ 26
VII. Sur les bases $a = \alpha^2 \pm 2$ 28
VIII. Remarques sur les résultats précédents 32

TROISIÈME PARTIE

Solutions avec un nombre commun.

IX. Les solutions (s, v) et (t, v) 35
X. Les solutions (s, t) et (s, v) 37
XI. Sur l'équation $u^2 - 2v^2 = \pm A_{2r+1}$ 40

QUATRIÈME PARTIE

Sur la hauteur d'un nombre premier.

XII. Applications de certaines bases spéciales 44
XIII. Remarques sur les hauteurs 2, 3, 4 48
XIV. Sur les bases 34, 79, 82, 101 51

TABLES NUMÉRIQUES

Pages
Table I. Les bases 34, 306, 850 58
Table II. Les bases 79, 711, 6399 62
Table III. Les bases 82, 738, 6642 65
Table IV. Les bases 101, 2525 67

Forelagt paa Mødet den 20. April 1923.
Færdig fra Trykkeriet den 28. Juli 1923.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **V**, 6.

EIN SATZ ÜBER POTENZREIHEN UNENDLICH VIELER VARIABELN MIT ANWENDUNG AUF DIRICHLETSCHE REIHEN

VON

H. D. KLOOSTERMAN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1923

Einleitung*.

Von H. Bohr ist ein wichtiger Zusammenhang entdeckt zwischen der Theorie der Dirichletschen Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$ einerseits und der Theorie der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln andrerseits[1].

Es sei

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it \tag{1}$$

eine gewöhnliche Dirichletsche Reihe und es sei gesetzt

$$x_1 = \frac{1}{2^s}, \quad x_2 = \frac{1}{3^s}, \ \ldots\ldots \ x_m = \frac{1}{p_m^s}, \ \ldots\ldots,$$

wo p_m die m-te Primzahl bedeutet. Ist $n = p_{n_1}^{\nu_1} p_{n_2}^{\nu_2} \ldots\ldots p_{n_r}^{\nu_r}$ die Zerlegung der ganzen Zahl n in Primfaktoren, so läszt sich die Dirichletsche Reihe mit Hilfe der Gröszen x_m ($m = 1, 2, \ldots.$) rein formal schreiben als eine Potenzreihe mit einer unendlichen Anzahl von Variabeln

$$P(x_1, x_2, \ldots\ldots x_m, \ldots,) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_{n_1}^{\nu_1} x_{n_2}^{\nu_2} \ldots\ldots x_{n_r}^{\nu_r} =$$

$$= c + \sum_{\alpha=1,2,\ldots} c_\alpha x_\alpha + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\ldots \\ \alpha<\beta}} c_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta + \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=1,2,\ldots \\ \alpha\leq\beta\leq\gamma}} c_{\alpha,\beta,\gamma} x_\alpha x_\beta x_\gamma + \ldots.$$

* Ich möchte gerne Herrn Prof. Dr. H. Bohr danken für seine Hilfe bei der Bearbeitung dieser Abhandlung. Eine kurze Mitteilung der Resultate ist in den »Verslagen der Kon. Akad. van Wetenschappen, te Amsterdam, 24 Maart 1923« erschienen.

[1] H. Bohr, Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variabeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$, Gött. Nachr. 1913, p. 441—488.

Diese Potenzreihe nennt Bohr die zur Dirichletschen Reihe gehörige Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots . x_m, \ldots .$

Der Zusammenhang ist von Bohr u. a. angewendet auf das sogenannte absolute Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen, d. h. auf die Bestimmung der absoluten Konvergenzabszisse der Reihe (1) aus einfachen analytischen Eigenschaften der von der Reihe dargestellten Funktion. Es sei B die absolute Konvergenzabszisse der Reihe (1) und D die untere Grenze aller Zahlen α mit der Eigenschaft, dasz $f(s)$ für $\sigma > \alpha$ regulär und beschränkt ist. Das absolute Konvergenzproblem ist gelöst, wenn man die Differenz $B-D$ kennt. Bohr beweist, dasz die Gleichung $B = D$ zutrifft für jede Dirichletsche Reihe, die rein formal eine Darstellung in einer der beiden Formen

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{p_m}^{l}}{(p_m^l)^s}$$

oder

$$f(s) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{p_m}^{l}}{(p_m^l)^s}\right)$$

zuläszt, also für jede Dirichletsche Reihe, für welche die zugehörige Potenzreihe unendlich vieler Variabeln die Gestalt

$$P(x_1, x_2, \ldots . x_m, \ldots .) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{P}_n(x_n) \tag{2}$$

oder

$$P(x_1, x_2, \ldots . x_m, \ldots .) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \mathfrak{P}_n(x_n)\right) \tag{3}$$

hat, wo $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots .)$ Potenzreihen sind in x_n allein ohne konstantes Glied. Der Beweis beruht auf dem folgenden Satze[2]: Damit für die Dirichletsche Reihe (1)

[2] Dieser Satz ist leicht den §§ 4 und 5 der sub[1]) zitierten Bohrschen Abhandlung zu entnehmen.

die Gleichung $B = D$ gültig sei, ist hinreichend, dasz die zu (1) gehörige Potenzreihe unendlich vieler Variabeln die folgende Eigenschaft hat: Wenn sie im Gebiete $|x_n| < G_n\,(n = 1, 2, \ldots.;\ (G_n)$ ist eine positive Zahlenfolge) beschränkt[3] ist, ist sie im Gebiete $|x_n| \leq \theta\, G_n\,(n = 1, 2, \ldots.)$ absolut konvergent, wenn θ eine beliebige feste Zahl des Intervalles $0 < \theta < 1$ ist. Man braucht also nur zu beweisen, dasz die Reihen (2) und (3) diese Eigenschaft besitzen.

Betrachten wir die Potenzreihen (2) und (3), dann sehen wir, dasz hier die Variabeln x_n gewissermaszen separiert auftreten. Dies hat Bohr auf die Vermutung geführt, dasz die Gleichung $B = D$ zutrifft für jede Dirichletsche Reihe, bei der in der zugehörigen Potenzreihe unendlich vieler Variabeln, die Variabeln, (ungenau ausgedrückt) nicht zu sehr ineinander »eingefiltert« sind. Als Bestätigung dieser Vermutung wird nun in dieser Abhandlung bewiesen, dasz $B = D$ für jede Dirichletsche Reihe, die sich formal in der Gestalt

$$f(s) = \varphi\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{p_m^l}}{(p_m^l)^s}\right)$$

darstellen läszt. Hierin bezeichnet φ eine willkürliche, (nicht konstante[4]) ganze transzendente Funktion. Weil die zugehörige Potenzreihe unendlich vieler Variabeln die Gestalt $\varphi\,(\mathfrak{P}_1(x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2) + \ldots.)$ hat, wo die $\mathfrak{P}_n(x_n)\,(n = 1, 2, \ldots.)$ Potenzreihen allein in x_n sind ohne konstantes Glied, ge-

[3] Der Begriff der Beschränktheit einer Potenzreihe unendlich vieler Variabeln ist von D. Hilbert definiert worden in seiner Abhandlung: Wesen und Ziele einer Analysis der unendlich vielen Variabeln, Palermo Rend. 27 (1909), p. 59—74. Die Definition wird in unserem § 1 noch einmal gegeben.

[4] Wenn $\varphi\,(y)$ konstant ist, ist der Satz trivial.

nügt es nach dem oben erwähnten Satze das Folgende zu beweisen:

Hauptsatz. Es sei φ eine ganze transzendente Funktion und $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ formale Potenzreihen in den Variabeln x_n ohne konstantes Glied. Ist dann die Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln $P(x_1, x_2, \ldots. x_m, \ldots.) = \varphi(\mathfrak{P}_1(x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2) + \ldots. + \mathfrak{P}_m(x_m) + \ldots.)$ im Gebiete $|x_n| \leqq G_n$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ beschränkt, dann ist sie für $|x_n| \leqq \theta G_n$ absolut konvergent, wenn θ eine willkürliche positive Zahl kleiner als 1 ist.

Der Beweis vorstehenden Satzes ist der Zweck dieser Abhandlung.

Im § 1 werden einige vorbereitende Bemerkungen gemacht. Besonders wird hervorgehoben der Unterschied zwischen »formalem« und »realem«.

Die folgenden §§ enthalten den eigentlichen Beweis des Satzes. Im § 2, der den »Übergang vom formalen zum realen« enthält, wird zuerst bewiesen, dasz aus der gegebenen Beschränktheit der Potenzreihe unendlich vieler Variabeln folgt, dasz die formalen Potenzreihen $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ analytische Funktionen definieren, und es werden diese Funktionen näher untersucht. Es zeigt sich, dasz zwei verschiedene Fälle unterschieden werden müssen, nämlich: Entweder sind die Funktionen $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ im Kreise $|x_n| < G_n$ alle regulär, oder sie lassen sich darstellen als Logarithmen von im Kreise $|x_n| < G_n$ regulären Funktionen.

Im § 3 wird der Beweis des Hauptsatzes für den ersten Fall und im § 4 für den zweiten Fall zu Ende geführt.

Es ist interessant, dasz die Potenzreihe (2) speziell (mit $\varphi(y) = y$) zum ersten Falle gehört und die Potenzreihe (3)

(mit $\varphi(y) = e^y$) zum zweiten Falle. Am Ende des § 2 wird dies deutlicher hervortreten.

§ 1.

Es sei

$$P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots) =$$

$$= c + \sum_{\alpha=1,2,\ldots} c_\alpha x_\alpha + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1,2,\ldots \\ \alpha\leqq\beta}} c_{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta + \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma=1,2,\ldots \\ \alpha\leqq\beta\leqq\gamma}} c_{\alpha,\beta,\gamma} x_\alpha x_\beta x_\gamma + \ldots .$$

eine Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots$ Nach Hilbert[3] nennt man m-ten Abschnitt dieser Potenzreihe diejenige Potenzreihe $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ der m Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m$, die man erhält, wenn man in P die Variabeln $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$ sämtlich durch Null ersetzt. Es sei $G_1, G_2, \ldots G_m, \ldots$ eine Folge positiver Zahlen. Die Potenzreihe P heiszt dann beschränkt im Gebiete $|x_1| \leqq G_1, |x_2| \leqq G_2, \ldots |x_m| \leqq G_m, \ldots$ wenn sie den beiden folgenden Bedingungen genügt:

a) Die Potenzreihen $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$, die m-ten Abschnitte, sind bei jedem $m > 1$ im Gebiete $|x_1| < G_1$, $|x_2| < G_2, \ldots |x_m| \leqq G_m$ absolut konvergent.

b) Es existiert eine von m unabhängige Zahl K, derart, dasz bei jedem $m \geqq 1$ im Gebiete $|x_1| \leqq G_1, |x_2| < G_2, \ldots |x_m| \leqq G_m$ die Ungleichung

$$|P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)| < K$$

gilt.

Im Folgenden werden wir weiter Behauptungen von der folgenden Form aussprechen: Die Ausdrücke $\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{P}_n(x_n)\right)$ und $V\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \Phi_n(x_n))\right)$, wo φ und V ganze Transzendenten sind, und $\mathfrak{P}_n(x_n)$ und $\Phi_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ Potenzreihen ohne konstantes Glied, definieren gewisse Potenzreihen von unendlich vielen Variabeln.

Betrachten wir zuerst den ersten Ausdruck, nämlich $\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{P}_n(x_n)\right)$. Hier ist φ eine ganze Transzendente, die etwa die folgende Potenzreihenentwicklung hat: $\varphi(y) = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \ldots$.

Die Reihen $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ haben die folgende Form:

$$\mathfrak{P}_n(x_n) = a_1^{(n)}x_n + a_2^{(n)}x_n^2 + a_3^{(n)}x_n^3 + \ldots. \quad (n = 1, 2, \ldots.).$$

Setzen wir nun den Ausdruck $y = \sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{P}_n(x_n)$ in die Potenzreihe für $\varphi(y)$ ein, und ordnen wir alles formal nach wachsenden Potenzen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots. x_m, \ldots$, so bekommen wir eine eindeutig bestimmte Potenzreihe der Variabeln $x_1, x_2, \ldots. x_m, \ldots.$, denn die Koeffizienten entstehen als Summen von endlich vielen Zahlen, von denen jede ein Produkt ist einer Zahl β mit Zahlen der Form $a_k^{(n)}(k, n = 1, 2, \ldots.)$. Ausdrücklich musz hervorgehoben werden, dasz die Anzahl der Summanden nur daher endlich ausfällt, weil die Potenzreihen $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ kein konstantes Glied haben.

Etwas komplizierter ist der Nachweis, dasz auch $V\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \Phi_n(x_n))\right)$ eine Potenzreihe definiert. Denn weil die Potenzreihen $R_n(x_n) = 1 + \Phi_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ ein konstantes Glied (nämlich das Glied 1) haben, bekommt man durch formales Ausschreiben von $V\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \Phi_n(x_n))\right)$ eine Potenzreihe $R(x_1, x_2, \ldots. x_m, \ldots.)$, worin die Koeffizienten als Summen von unendlichen Reihen auftreten. Diese haben also nicht eine unmittelbare »reale« Bedeutung, weil es möglich ist, dasz die unendlichen Reihen divergieren. Wir werden aber beweisen, dasz die Reihen in unserem Falle alle absolut konvergieren. In unserem Falle sind nämlich (vergl. § 4) die Potenzreihen

$\Phi_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ in gewissen Kreisen $|x_n| \leq H_n$ konvergent.

Es genügt offenbar, zu zeigen, dasz die Entwicklung von

$$V\big((1+\Phi_1(x_1))\,(1+\Phi_2(x_2))\,\ldots.\,(1+\Phi_m(x_m))\big)$$

für jedes m eindeutig zu einer Potenzreihe $R_m(x_1, x_2, \ldots. x_m)$ führt, die dann den m-ten Abschnitt in $R(x_1, x_2, \ldots. x_m, \ldots.)$ bestimmt; oder, was dasselbe besagt, dasz die unendlichen Reihen, die die Koeffizienten in $R_m(x_1, x_2, \ldots. x_m)$ bestimmen, alle absolut konvergieren.

Ist

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n,\quad 1+\Phi_s(x_s) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(s)} x_s^{(n)},\quad (s = 1, 2, \ldots.),$$

so bekommt man $R_m(x_1, x_2, \ldots. x_m)$ durch formales Ausschreiben von

$$\sum_{r=0}^{\infty} \gamma_r \big((1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(1)} x_1^n)\,(1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(2)} x_2^n)\,\ldots.\,(1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(m)} x_m^n)\big)^r.$$

Die unendlichen Reihen, die die Koeffizienten bestimmen, sind also absolut konvergent, weil

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_r| \big((1+\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{(1)} x_1^n|)\,(1+\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{(2)} x_2^n|)\,\ldots.\,(1+\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{(m)} x_m^n|)\big)^r$$

für $|x_s| < H_s$ $(s = 1, 2, \ldots. m)$ konvergiert.

§ 2.

Mit Hilfe der Transformation $x_n = \dfrac{G_n}{G} x_n'$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ ist es unmittelbar einleuchtend, dasz es gestattet ist, die Gröszen G_n alle gleich einer willkürlichen positiven Zahl G zu nehmen. Wir wählen diese Zahl G gröszer als 1, aber nur so viel, dasz θG (wo θ die in der Formulierung des Hauptsatzes erwähnte Zahl ist) kleiner als 1 ist. Wir setzen $\theta G = \Theta$.

Wie wir in § 1 bemerkt haben, wird durch den Ausdruck $\varphi(\mathfrak{P}_1(x_1)+\mathfrak{P}_2(x_2)+\ldots.+\mathfrak{P}_m(x_m)+\ldots.)$ eine Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots. x_m, \ldots.)$ bestimmt. Wollen wir die Beschränktheit dieser Potenzreihe zum Ausdruck bringen, dann haben wir nach § 1 die m-ten Abschnitte zu bilden. Es sei $P_m(x_1, x_2, \ldots. x_m)$ der m-te Abschnitt $(m = 1, 2, \ldots.)$ von $P(x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots)$. Wir können dann $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ erhalten durch formales Ausrechnen von $\varphi\left(\mathfrak{P}_1(x_1)+\mathfrak{P}_2(x_2)+\ldots.+\mathfrak{P}_m(x_m)\right)$, und die Beschränktheit besagt dann, dasz für $|x_n|<G\,(n=1,2,\ldots m)$ die Potenzreihen $P_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ absolut konvergieren, und dasz

$$|P_m(x_1, x_2, \ldots. x_m)|<K, \tag{4}$$

wo K eine von m unabhängige Konstante ist.

Aus der Voraussetzung der Beschränktheit, ausgedrückt durch (4) und aus der Voraussetzung, dasz φ eine ganze Transzendente ist, können wir nacheinander einige Sätze über die $\mathfrak{P}_n(x_n)\,(n = 1, 2, \ldots.)$ beweisen. Wir können hierbei annehmen, dasz unendlich viele der x_n tatsächlich in P vorkommen (d. h. dasz ihre entsprechende Potenzreihen $\mathfrak{P}_n(x_n)$ nicht identisch null sind), denn für eine endliche Anzahl von Variabeln ist der Hauptsatz offenbar richtig. Auch können wir annehmen, dasz alle Variabeln wirklich vorkommen (denn wir können immer die Variabeln $x_1, x_2, \ldots. x_m, \ldots.$ nennen).

Satz 1. Die Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x_1)$ (und daher auch alle anderen $\mathfrak{P}_n(x_n)$[5]) hat ein gewisses Konvergenzgebiet. Sie definiert also eine analytische Funktion. Diese Funktion[6]

[5] Weil die Beschränktheit einer Potenzreihe von unendlich vielen Variabeln eine Eigenschaft ist, die unabhängig ist von der Reihenfolge der Variabeln.

[6] D. h. derjenige Funktionszweig, der durch das Element $\mathfrak{P}_1(x_1)$ definiert ist und aus $\mathfrak{P}_1(x_1)$ durch Fortsetzung erhalten werden kann, ohne dabei den Kreis $|x_1| = G$ zu überschreiten.

kann für $|x_1| < G$ nur logarithmische Singularitäten und Pole haben.

Beweis. *a.* Wir benutzen die Ungleichung (4) für $m = 2$ und betrachten also $P_2(x_1, x_2)$, das durch formales Ausrechnen von $\varphi(\mathfrak{P}_1(x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2))$ entsteht. Es sei x_2^{λ} die niedrigste in $\mathfrak{P}_2(x_2)$ vorkommende Potenz von x_2 und $a_\lambda^{(2)}$ ihr Koeffizient. Die Summe derjenigen Glieder aus $P_2(x_1, x_2)$, die x_2 in der Potenz λ enthalten, hat die Form $a_\lambda^{(2)} x_2^{\lambda} \psi_2(x_1)$, wo $\psi_2(x_1)$ eine Potenzreihe in x_1 ist, die durch formales Ausrechnen von $\varphi'(\mathfrak{P}_1(x_1))$ erhalten werden kann. Weil $P_2(x_1, x_2)$ für $|x_1| < G$, $|x_2| < G$ absolut konvergiert ist auch $a_\lambda^{(2)} x_2^{\lambda} \psi_2(x_1)$ als Teilreihe einer absolut konvergenten Reihe für $|x_1| < G$ absolut konvergent. Also:

Die Potenzreihe $\psi_2(x_1)$, die durch formales Ausrechnen von $\varphi'(\mathfrak{P}_1(x_1))$ erhalten werden kann, ist für $|x_1| < G$ konvergent und verschwindet nicht identisch.

b. Nach den Voraussetzungen ist die Potenzreihe, die man durch formales Ausrechnen von $\varphi(\mathfrak{P}_1(x_1))$ erhält, für $|x_1| < G$ konvergent. Dasselbe gilt daher für ihre Ableitung, die man durch formales Ausrechnen von $\varphi'(\mathfrak{P}_1(x_1))\mathfrak{P}_1'(x_1)$ erhalten kann. Also:

Die Potenzreihe $\psi_1(x_1)$, die man erhält, wenn man $\varphi'(\mathfrak{P}_1(x_1))\,\mathfrak{P}_1'(x_1)$ formal nach Potenzen von x_1 entwickelt, ist für $|x_1| < G$ konvergent.

c. Wir kombinieren nun die Resultate aus *a.* und *b.* Nach *a.* und *b.* werden durch $\psi_1(x_1)$ und $\psi_2(x_1)$ im Kreise $|x_1| < G$ reguläre Funktionen dargestellt. Durch $\dfrac{\psi_1(x_1)}{\psi_2(x_1)}$ wird also eine analytische Funktion dargestellt, die für $|x_1| < G$ nur Pole haben kann. In einer gewissen Umgebung des Nullpunktes musz also eine Laurent-Entwicklung der folgenden Form gültig sein:

$$\frac{\psi_1(x_1)}{\psi_2(x_1)} = \frac{A_{-m}}{{x_1}^m} + \frac{A_{-(m-1)}}{{x_1}^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{-1}}{x_1} + A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2 + \ldots$$

Weiter gilt die formale Beziehung[7]

$$\frac{\psi_1(x_1)}{\psi_2(x_1)} = \mathfrak{P}_1'(x_1) = B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_1^2 + \ldots .$$

Durch Vergleich ergibt sich $\mathfrak{P}_1'(x_1) = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2 + \ldots$, so dasz die — bis jetzt nur formale — Potenzreihe $\mathfrak{P}_1'(x_1)$ ein gewisses Konvergenzgebiet besitzen musz und also eine analytische Funktion definiert. Durch die — nun nicht mehr formale — Beziehung

$$\mathfrak{P}_1'(x_1) = \frac{\psi_1(x_1)}{\psi_2(x_1)}$$

wird diese Funktion von der Umgebung des Nullpunktes aus im Kreise $|x_1| < G$ fortgesetzt, so dasz $\mathfrak{P}_1'(x_1)$ im Kreise $|x_1| < G$ nur Pole haben kann.[8]

Durch Integration folgt hieraus, dasz $\mathfrak{P}_1(x_1)$[6] für $|x_1| < G$ höchstens logarithmische Singularitäten und Pole haben kann.

Satz 2. $\mathfrak{P}_1(x_1)$[6] (und daher auch alle anderen $\mathfrak{P}_n(x_n)$) kann für $|x_1| < G$ keine Pole haben. In den logarithmischen Singularitäten kann auch kein Pol-Bestandteil vorhanden sein.

Beweis. Die Funktion $\psi_3(x_1)$, deren Potenzreihenentwicklung durch formales Ausrechnen von $\varphi(\mathfrak{P}_1(x_1))$ erhalten werden kann, ist für $|x_1| < G$ regulär.

Es sei nun α ein singulärer Punkt von $\mathfrak{P}_1(x_1)$, so dasz

[7] Formale Division ist das Umgekehrte von formaler Multiplikation. Die Gleichung des Textes bedeutet also, dasz die formale Beziehung $\psi_1(x_1) = \psi_2(x_1)\,\mathfrak{P}_1'(x_1)$ gilt, wenn für $\psi_1(x_1)$, $\psi_2(x_1)$ und $\mathfrak{P}_1'(x_1)$ die Potenzreihen eingesetzt werden. Formale Division zweier Potenzreihen (von denen der Divisor nicht identisch verschwindet) führt offenbar zu einer eindeutigen Entwicklung nach steigenden Potenzen von x_1, mit höchstens endlich vielen negativen Exponenten.

[8] Dieselbe Bemerkung über $\mathfrak{P}_1'(x_1)$ wie in [6] über $\mathfrak{P}_1(x_1)$.

in einer Umgebung dieses Punktes eine Entwicklung von der Form

$$\mathfrak{P}_1(x_1) = A \log(x_1 - \alpha) + \sum_{n=1}^{m} \frac{A_n}{(x_1-\alpha)^n} + \mathfrak{P}(x_1 - \alpha)$$

gilt ($\mathfrak{P}(x_1-\alpha)$ ist eine in einer Umgebung von $x_1 = \alpha$ konvergente Potenzreihe in $x_1 - \alpha$). Es handelt sich dann darum, zu beweisen, dasz alle A_n ($n = 1, 2, \ldots m$) null sind. Wir werden zeigen, dasz die ganze transzendente Funktion φ sich auf eine Konstante reduziert, wenn dies nicht der Fall ist.

Zuerst bemerken wir, dasz, weil $\psi_3(x_1)$ im Kreise $|x_1| < G$ regulär ist, $\lim\limits_{x_1 \to \alpha} \varphi(\mathfrak{P}_1(x_1)) = \lim\limits_{x_1 \to \alpha} \psi_3(x_1)$ existiert und einen gewissen endlichen Wert β hat, und zwar unabhängig davon, in welcher Weise sich x_1 dem Punkte α nähert.

Wir setzen

$$w_1 = \sum_{n=1}^{m} \frac{A_n}{(x_1-\alpha)^n} + \mathfrak{P}(x_1-\alpha), \quad w_2 = A \log(x_1 - \alpha),$$
$$w = w_1 + w_2.$$

Wenn dann x_1 einen kleinen Kreis um den Punkt α durchläuft, so durchläuft w_1 eine »grosze«[9] geschlossene Kurve, während w_2 sich um $2\pi i A$ ändert; die Summe w von w_1 und w_2 beschreibt also eine »grosze« Kurve um den Nullpunkt, und den Endpunkt erhält man aus dem Anfangspunkt durch Verschiebung um $2\pi i A$. Wir können nun x_1 den kleinen Kreis nochmals durchlaufen lassen. Dann durchläuft w wieder eine »grosze« Kurve, und der Endpunkt ist wieder aus dem Anfangspunkt entstanden

[9] Das Wort »grosze« Kurve bedeutet, dasz die Kurve nach und nach in das Unendliche rückt, wenn der von x_1 beschriebene Kreis kleiner und kleiner, zuletzt beliebig klein genommen wird.

durch Verschiebung um $2\pi i A$. Wir können dies beliebig oft wiederholen, auch in negativem Sinne; w beschreibt dann eine Spiralkurve γ. Wenn wir nun den Radius des von x_1 um den Punkt α beschriebenen Kreises stetig nach Null abnehmen lassen, so zieht sich die Kurve γ in das Unendliche und durchstreift dabei sämtliche Werte, die einen Modul haben, der gröszer ist als eine gewisse endliche Zahl. Hieraus folgt, dasz, wenn nicht alle $A_n (n = 1, 2, \ldots . m)$ null sind, die Funktion $\mathfrak{P}_1(x_1)$ in der Umgebung des Punktes α sämtliche Werte einer gewissen Umgebung des unendlich fernen Punktes der w-Ebene annimmt. Wenn $w = \mathfrak{P}_1(x_1)$ sich also über einen beliebigen Weg in das Unendliche bewegt, strebt $\varphi(w)$ der konstanten Zahl β zu, unabhängig davon, welchen Weg w dabei durchläuft. Nach einem bekannten Satze musz $\varphi(w)$ sich dann auf eine Konstante reduzieren, was nach den Voraussetzungen nicht der Fall ist.

Bevor wir weiter gehen, seien nun zuerst zwei Bemerkungen gemacht. Wie eben bewiesen ist, können die $\mathfrak{P}_n(x_n) (n = 1, 2, \ldots .)$ im Kreise $|x_n| < G$ nur logarithmische Singularitäten »ohne Pol-Bestandteil« haben. Die Anzahl der Singularitäten kann sehr gut unendlich sein. Weil aber $G > 1$ gewählt ist, ist die Anzahl der Singularitäten im Kreise $|x_n| \leq 1$ endlich.

Die zweite Bemerkung ist die folgende: Wenn es zu einer (nicht konstanten) ganzen Transzendenten $\varphi(y)$ eine Zahl M_1 gibt, derart, dasz $\varphi(y)$ in der Form $V(e^{\frac{y}{M_1}})$ geschrieben werden kann, wo $V(z)$ eine ganze Transzendente von z ist, so gibt es unendlich viele Zahlen mit dieser Eigenschaft, z. B. $2M_1, 3M_1, \ldots .$ Unter allen diesen Zahlen gibt es aber gewisz eine (und nur eine) Zahl M mit der Eigenschaft, dasz jede andre Zahl M_1 ein po-

sitives ganzes Multiplum von M ist[10]. Wenn wir in dem folgenden Satz 3 von einer Funktion $\varphi(y)$ sprechen, die in der Form $V(\overset{y}{e^{M}})$ (V ganze Transzendente) geschrieben werden kann, so werden wir uns hierbei M als die oben charakterisierte, d. h. als die »kleinste« unter den möglichen Zahlen denken.

Satz 3. Wenn die ganze transzendente Funktion $\varphi(y)$ nicht die Form $V(\overset{y}{e^{M}})$ hat (wo V wieder eine ganze Transzendente ist), so ist $\mathfrak{P}_1(x_1)$ für $|x_1| < 1$ regulär. Wenn dagegen $\varphi(y)$ in der Form $V(\overset{y}{e^{M}})$ darzustellen ist, so können wir nur schlieszen, dasz $\mathfrak{P}_1(x_1)$ die Form $M \log f_1(x_1)$ hat, wo $f_1(x_1)$ für $|x_1| < 1$ regulär ist (dasselbe gilt natürlich wieder für die anderen Funktionen $\mathfrak{P}_n(x_n)$, $n = 2, 3, \ldots$).

Beweis: Der Satz ist bewiesen, wenn gezeigt ist, dasz, falls $\mathfrak{P}_1(x_1)$ logarithmische Singularitäten hat, immer $\varphi(y)$ die Gestalt $V(\overset{y}{e^{M}})$ und $\mathfrak{P}_1(x_1)$ die Gestalt $M \log f_1(x_1)$ hat.

Es sei α eine logarithmische Singularität von $\mathfrak{P}_1(x_1)$. Nach Satz 2 wird dann $\mathfrak{P}_1(x_1)$ in der Umgebung dieses Punktes dargestellt durch

$$\mathfrak{P}_1(x_1) = A \log(x_1 - \alpha) + R_\alpha(x_1)$$

wo $R_\alpha(x_1)$ eine Funktion ist, die in $x_1 = \alpha$ regulär ist. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$S_\alpha(x_1) = e^{\frac{1}{A} R_\alpha(x_1)}, \quad T_\alpha(x_1) = (x_1 - \alpha)\, S_\alpha(x_1).$$

Dann ist $S_\alpha(\alpha) \neq 0$, so dasz $T_\alpha(x_1)$ im Punkte α eine einfache Nullstelle hat. Ist also $x_1 = U_\alpha(v)$ die Um-

[10] Man erhält M folgendermaszen: Unter den Perioden der periodischen Funktion $\varphi(y) = V(\overset{y}{e^{M_1}})$ gibt es zwei »primitive Perioden« $\pm 2\pi i M_0$. M ist dann diejenige der beiden Zahlen $+M_0$ und $-M_0$ von welcher M_1 ein positives Multiplum ist.

kehrung von $v = T_\alpha(x_1)$, so ist $U_\alpha(v)$ eine analytische Funktion, die in einer Umgebung des Nullpunktes regulär ist.

Nun ist nach den Voraussetzungen $\psi_3(x_1) = \varphi(\mathfrak{P}_1(x_1))$ eine im Kreise $|x_1| < G$, also auch für $|x_1| \leqq 1$, reguläre Funktion, und $\psi_3(x_1) = \varphi(A \log T_\alpha(x_1))$, oder, wenn wir noch $A \log T_\alpha(x_1) = y$ setzen:

$$\varphi(y) = \psi_3(U_\alpha(e^{\frac{y}{A}})) = V_\alpha(e^{\frac{y}{A}}). \tag{5}$$

Hierin haben wir zur Abkürzung das Funktionszeichen V_α statt $\psi(U_\alpha)$ eingeführt.

Betrachten wir eine Umgebung des Punktes $x_1 = \alpha$ in der x_1-Ebene. Diese wird durch $v = T_\alpha(x_1)$ auf eine Umgebung des Nullpunktes in der v-Ebene abgebildet und weiter durch $y = A \log v$ auf eine Halbebene E in der y-Ebene. In dieser Halbebene ist $U_\alpha(e^{\frac{y}{A}})$ regulär, und, weil $\psi_3(x_1)$ für $|x_1| < 1$ regulär ist, ist auch $V_\alpha(e^{\frac{y}{A}})$ in E regulär. In E gilt die Gleichung (5). Speziell geht daraus hervor, dasz in E:

$$\varphi(y + 2\pi i A) = \varphi(y). \tag{6}$$

Die Funktionen links und rechts vom Gleichheitszeichen sind aber ganze Transzendenten. (6) musz also in der ganzen y-Ebene gültig sein.

Die Gleichung (5) kann aber auch so aufgefaszt werden, dasz sie die Fortsetzung von V_α in der ganzen Ebene gibt. Setzen wir $e^{\frac{y}{A}} = v$, dann wird (5):

$$V_\alpha(v) = \varphi(A \log v).$$

Dies gilt in einer Umgebung des Nullpunktes der v-Ebene. Die rechte Seite dieser Gleichung ist nach (6) eine in der ganzen v-Ebene eindeutige, reguläre Funktion mit Ausnahme vielleicht des Nullpunktes. Dasselbe gilt daher für

$V_\alpha(v)$. Leicht ergibt sich, dasz $V_\alpha(v)$ auch im Nullpunkte regulär ist, denn $\lim_{v \to 0} V_\alpha(v) = \lim_{v \to 0} \varphi(A \log v) = \lim_{x_1 \to \alpha} \psi_3(x_1)$ hat einen bestimmten endlichen Wert, unabhängig von der Weise, in der v sich dem Nullpunkte nähert. Hieraus folgt aber nach einem bekannten Satze, dasz $V_\alpha(v)$ im Nullpunkte regulär ist.

Die Funktion V_α ist also eine ganze Transzendente.

Führen wir die in der vorausgeschickten Bemerkung eingeführte Zahl M ein, dann ergibt sich $\varphi(y) = V(e^{My})$ (V = ganze Transzendente), und $A = aM$, wo a eine ganze positive Zahl ist.

Sind α_n ($n = 1, 2, \ldots . r$) die andern singulären Stellen von $\mathfrak{P}_1(x_1)$ im Kreise $|x_1| < 1$, (wie schon bemerkt, ist die Anzahl dieser Stellen endlich) und gilt in einer Umgebung von α_n, dasz

$$\mathfrak{P}_1(x_1) = A_n \log(x_1 - \alpha_n) + R_{\alpha_n}(x_1) \quad (n = 1, 2, \ldots r),$$

wo $R_{\alpha_n}(x_1)$ in $x_1 = \alpha_n$ regulär ist, so können wir in derselben Weise $A_n = a_n M$ ($n = 1, 2, \ldots . r$) beweisen, wo alle a_n ($n = 1, 2, \ldots . r$) ganze positive Zahlen sind. Die Funktion $\mathfrak{P}_1(x_1)$ läszt sich nun wie folgt schreiben:

$$\mathfrak{P}_1(x_1) = A \log(x_1 - \alpha) + A_1 \log(x_1 - \alpha_1) + A_2 \log(x_1 - \alpha_2) + \ldots . + A_r \log(x_1 - \alpha_r) + G_1(x_1)$$

(wo $G_1(x_1)$ im Kreise $|x_1| \leqq 1$ regulär ist), oder

$$\mathfrak{P}_1(x_1) = M \log(x_1 - \alpha)^a (x_1 - \alpha_1)^{a_1} (x_1 - \alpha_2)^{a_2} \ldots . (x_1 - \alpha_r)^{a_r} e^{G_1(x_1)} = M \log f_1(x_1).$$

Weil $(x_1 - \alpha)^a (x_1 - \alpha_1)^{a_1} (x_1 - \alpha_2)^{a_2} \ldots . (x_1 - \alpha_r)^{a_r} e^{G_1(x_1)}$ im Kreise $|x_1| < 1$ regulär ist, ist Satz 3 hiermit bewiesen.

§ 3.

Bei dem Beweise des Hauptsatzes werden wir den folgenden, von H. Bohr[11] bewiesenen Satz gebrauchen:

Es sei die Funktion $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ mit $f(0) = 0$, regulär im Kreise $|z| \leq 1$. Es sei $M(\varrho)$ das Maximum von $|f(z)|$ auf dem Kreise $|z| = \varrho$ $(0 < \varrho < 1)$. Ist dann r der Radius des gröszten Kreises, dessen Punkte sämtlich Werte repräsentieren, die von $f(z)$ im Kreise $|z| \leq 1$ angenommen werden, so gilt: $r \geq k M(\varrho)$, wo k eine nur von ϱ abhängige Konstante ist (die also gleichmäszig gilt für alle Funktionen $f(z)$, die den Voraussetzungen des Satzes genügen).

In diesem § werden wir den Hauptsatz beweisen für den ersten der beiden nach Satz 3 möglichen Fälle. Es seien also die Potenzreihen $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ Elemente von für $|x_n| < 1$ regulären Funktionen[12]. Dann gilt der

Satz 4. Ist r_n $(n = 1, 2, \ldots.)$ der Radius des gröszten Kreises in der $\mathfrak{P}_n$-Ebene, dessen Punkte sämtlich Werte repräsentieren, die von $\mathfrak{P}_n(x_n)$ im Kreise $|x_n| \leq 1$ angenommen werden, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ konvergent.

Beweis. Zuerst sei bemerkt, dasz die Gleichung

$$P_m(x_1, x_2, \ldots. x_m) =$$
$$= \varphi\left(\mathfrak{P}_1(x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2) + \ldots. + \mathfrak{P}_m(x_m)\right) \quad (m = 1, 2, \ldots.),$$

die im Anfang nur einen formalen Sinn hatte, jetzt, wo die $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ wirkliche Funktionen (und nicht mehr formale Potenzreihen) sind, eine »reale« Bedeutung erworben hat, d. h. dasz sie benutzt werden kann, um

[11] H. Bohr, Über einen Satz des Herrn Landau, (Noch nicht publiziert).

[12] Dieselbe Bemerkung über $\mathfrak{P}_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$, die in [6] über $\mathfrak{P}_1(x_1)$ gemacht ist.

$P_m(x_1, x_2, \ldots . x_m)$ zu berechnen. Dies geht sofort daraus hervor, dasz die Reihe

$$\sum_{r=0}^{\infty} |\beta_r| \left(\sum_{n=1}^{m} \sum_{s=1}^{\infty} |a_s^{(n)} x_n^s| \right)^r$$

für $|x_n| \leq 1$ $(n = 1, 2, \ldots . m)$ konvergiert.

Die Ungleichung (4) wird also

$$|\varphi(\mathfrak{P}_1(x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2) + \ldots . + \mathfrak{P}_m(x_m))| < K. \qquad (7)$$

Weil $\varphi(y)$ eine ganze Transzendente ist, können wir eine Zahl L so grosz annehmen, dasz das Maximum von $|\varphi(y)|$ für $|y| = L$ gröszer als K ist. Wenn nur x_n $(n = 1, 2, \ldots .)$ die respektiven Einheitskreise $|x_n| < 1$ durchlaufen, nehmen die Funktionen $\mathfrak{P}_n(x_n)$ nach Voraussetzung alle Werte an, die durch $|\mathfrak{P}_n(x_n)| = r_n$ bestimmt sind. Hieraus folgt, dasz $\mathfrak{P}_1(x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2) + \ldots . + \mathfrak{P}_m(x_m)$ alle Werte annimmt, deren absoluter Betrag $r_1 + r_2 + \ldots . + r_m$ ist.

Hieraus folgt $r_1 + r_2 + \ldots . + r_m < L$. Denn wäre $r_1 + r_2 + \ldots . + r_m < L$, dann wäre das Maximum von $|\varphi(y)|$ auf dem Kreise $|y| = r_1 + r_2 + \ldots . + r_m$ gröszer als K, und weil $\mathfrak{P}_1(x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2) + \ldots . + \mathfrak{P}_m(x_m)$ alle Werte auf diesem Kreis annimmt, würden Werte $x_1', x_2', \ldots . x_m'$ existieren müssen $(|x_n'| < 1, \; n = 1, 2, \ldots . m)$ wofür $|\varphi(\mathfrak{P}_1(x_1') + \mathfrak{P}_2(x_2') + \ldots . + \mathfrak{P}_m(x_m'))| > K$ wäre. Dies kann nach (7) nicht der Fall sein. Daher ist $\sum_{n=1}^{m} r_n < L$. Weil L (ebenso wie K) von m unabhängig ist, musz also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ konvergieren.

Aus diesem Ergebnis läszt sich nun die absolute Konvergenz von $P(x_1, x_2, \ldots . x_m, \ldots .)$ leicht mit Hilfe des Bohrschen Satzes ableiten.

Beweis des Hauptsatzes für den ersten Fall.

Es sei $\Theta = \theta G$ die in § 2 definierte Zahl. Wir wollen

die absolute Konvergenz von $P(x_1, x_2, \ldots . x_m, \ldots .)$ im Gebiete $|x_n| \leqq \Theta\,(n = 1, 2, \ldots .)$ beweisen. Dazu wählen wir eine Zahl ϱ derart, dasz $\Theta < \varrho < 1$, z. B. $\varrho = \dfrac{1+\Theta}{2}$. Es sei $M_n(\varrho)$ das Maximum von $|\mathfrak{P}_n(x_n)|$ auf dem Kreise $|x_n| = \varrho$ $(n = 1, 2, \ldots .)$. Dann ist nach dem Bohr-schen Satze:

$$M_n(\varrho) \leqq \frac{r_n}{k} = r_n k_1, \tag{8}$$

wo k_1 eine nur von ϱ (oder nur von Θ) abhängige Zahl ist.

Von $M_n(\varrho)$ gehen wir auf Majoranten über. Es sei $\mathfrak{P}_n(x_n) = \sum_{s=1}^{s} a_s^{(n)} x_n^s$, $(n = 1, 2, \ldots .)$. Dann gilt nach Cauchy die Ungleichung

$$|a_s^{(n)}| \leqq \frac{M_n(\varrho)}{\varrho^s} \begin{pmatrix} n = 1, 2, \ldots . \\ s = 1, 2, \ldots . \end{pmatrix},$$

also

$$\sum_{s=1}^{s} |a_s^{(n)}|\,\Theta^s \leqq M_n(\varrho) \sum_{s=1}^{s} \left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^s = \frac{2\Theta M_n(\varrho)}{1-\Theta},$$

oder nach (8):

$$\sum_{s=1}^{s} |a_s^{(n)}|\,\Theta^s \leqq \frac{2k_1\Theta r_n}{1-\Theta}. \tag{9}$$

Nun ist nach Satz 4 die Reihe $\sum_{n=1}^{s} r_n$ konvergent; also ist nach (9) auch

$$\sum_{n=1}^{s} \sum_{s=1}^{s} |a_s^{(n)}|\,\Theta^s$$

konvergent. Ist weiter $\varphi(y) = \sum_{r=0}^{s} \beta_r y^r$, so ist $\sum_{r=0}^{s} |\beta_r|\,|y|^r$ für jeden endlichen Wert von y konvergent. Dies ergibt die Konvergenz von

$$\sum_{r=0}^{s} |\beta_r| \left(\sum_{n=1}^{s} \sum_{s=1}^{s} |a_s^{(n)}|\,\Theta^s\right)^r.$$

Man darf also die Reihenfolge der Glieder der Reihe

$$\sum_{r=0}^{\infty} \beta_r \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} a_s^{(n)} x_n^s \right)^r \tag{10}$$

für $|x_n| \leqq \Theta$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ willkürlich ändern und in willkürlicher Weise verschiedene Glieder in eines zusammenfügen: immer erhält man eine absolut konvergente Reihe. Durch diese Operationen kann (10) nach Definition in die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots. x_m, \ldots.)$ übergeführt werden, die also im Gebiete $|x_n| \leqq \Theta$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ absolut konvergiert.

§ 4.

Es liege nun der zweite der nach Satz 3 möglichen Fälle vor. Dann ist

$$\varphi(y) = V(e^{\frac{y}{M}}) \text{ und } \mathfrak{P}_n(x_n) = M \log f_n(x_n), \ (n = 1, 2, \ldots.),$$

wo V wieder eine ganze transzendente Funktion ist, und die Funktionen $f_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ für $|x_n| \leqq 1$ regulär sind. Wir schreiben

$$e^{\frac{1}{M}\mathfrak{P}_n(x_n)} = f_n(x_n) = 1 + \Phi_n(x_n) \ (n = 1, 2, \ldots.). \tag{10}$$

Die Funktionen $\Phi_n(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ sind dann für $|x_n| \leqq 1$ regulär und verschwinden im Nullpunkt, wie sofort aus (10) hervorgeht.

Wie schon in § 1 bewiesen ist, erhält man durch formales Ausrechnen von $V\left(\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \Phi_n(x_n)) \right)$ eine Potenzreihe unendlich vieler Variabeln.

Satz 5. Die Potenzreihen, die man durch formales Ausrechnen von $\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{P}_n(x_n) \right)$ und $V\left(\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \Phi_n(x_n)) \right)$ erhält, sind identisch.

Beweis. Es genügt offenbar, zu beweisen, dasz $P_m(x_1, x_2, \ldots. x_m)$ für jedes $m > 1$ dieselbe Potenzreihe ist, wie der m-te Abschnitt $R_m(x_1, x_2, \ldots. x_m)$ der aus

$V\left(\prod_{n=1}^{m}(1+\Phi_n(x_n))\right)$ erhaltenen Potenzreihe. Wir werden beweisen, dasz (nicht nur »formal«, sondern auch »real«)

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^{m}\mathfrak{P}_n(x_n)\right) = V(e^{\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{m}\mathfrak{P}_n(x_n)}) =$$

$$= V\left(\prod_{n=1}^{m}(1+\Phi_n(x_n))\right) \text{ für } |x_n|<1 \ (n=1, 2, \ldots. m).$$

Ist $\varphi(y) = \sum_{r=0}^{s}\beta_r y^r$ und $V(z) = \sum_{r=0}^{s}\gamma_r z^r$, so gilt für alle y die Identität

$$\sum_{r=0}^{s}\beta_r y^r = \sum_{r=0}^{s}\gamma_r\left[\sum_{p=0}^{s}\frac{1}{p!}\left(\frac{y}{M}\right)^p\right]^r.$$

Sind also die Reihen $\mathfrak{P}_n(x_n) = \sum_{s=1}^{s} a_s^{(n)} x_n^s$ $(n=1, 2, \ldots.)$ für $|x_n| \leqq k_n$ konvergent, so ist für $|x_n| \leqq k_n$

$$\sum_{r=0}^{s}\beta_r\left(\sum_{n=1}^{m}\sum_{s=1}^{s} a_s^{(n)} x_n^s\right)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{s}\gamma_r\left[\sum_{p=0}^{s}\frac{1}{p!}\frac{1}{M^p}\left(\sum_{n=1}^{m}\sum_{s=1}^{s} a_s^{(n)} x_n^s\right)^p\right]^r. \qquad (11)$$

Weil die Reihen

$$\sum_{r=0}^{s}|\beta_r|\left(\sum_{n=1}^{m}\sum_{s=1}^{s}|a_s^{(n)} x_n^s|\right)^r$$

und

$$\sum_{r=0}^{s}|\gamma_r|\left[\sum_{p=0}^{s}\frac{1}{p!}\frac{1}{M^p}\left(\sum_{n=1}^{m}\sum_{s=1}^{s}|a_s^{(n)} x_n^s|\right)^p\right]^r$$

für $|x_n| < k_n$ $(n=1, 2, \ldots. m)$ konvergieren, darf man auf jeder der beiden Seiten von (11) für $|x_n| < k_n$ die Reihenfolge der Glieder willkürlich ändern und Glieder zusammenfassen. Hieraus ersieht man:

$$P_m(x_1, x_2, \ldots. x_m) = R_m(x_1, x_2, \ldots. x_m)$$

für $|x_n| < k_n$ $(n = 1, 2, \ldots . m)$. Dasz dies für $|x_n| < 1$ gültig bleibt, folgt durch analytische Fortsetzung. Denn $P_m(x_1, x_2, \ldots . x_m)$ ist nach (4) eine für $|x_n| \leq 1$ $(n = 1, 2, \ldots m)$ reguläre Funktion von $x_1, x_2, \ldots . x_m$, und dasselbe gilt daher für $R_m(x_1, x_2, \ldots . x_m)$, weil R_m für $|x_n| < k_n$ regulär ist.

Hiermit ist der Satz 5 bewiesen. Speziell kann man die Ungleichung (4) nun wie folgt schreiben:

$$|V\left(\prod_{n=1}^{m}(1+\Phi_n(x_n))\right)| < K. \tag{12}$$

Ist r_n $(n = 1, 2, \ldots .)$ der Radius des grösz̈ten Kreises, dessen Punkte Werte repräsentieren, die von $\Phi_n(x_n)$ im Kreise $|x_n| \leqq 1$ angenommen werden, so gilt der

Satz 6. Das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+r_n)$, oder, was dasselbe besagt, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ ist konvergent.

Beweis. *a.* Aus (12) können wir zuerst schlieszen, dasz — ungenau ausgedrückt — unabhängig von m, die Funktion $\prod_{n=1}^{m}(1+\Phi_n(x_n))$ nicht in jeder Richtung Werte annehmen kann, die unendlich fern liegen, oder genauer: Wenn N grosz genug gewählt ist, kann keine geschlossene Kurve γ (der den Nullpunkt in ihrem Innern enthält) in einer z-Ebene existieren mit den beiden folgenden Eigenschaften:

1°. Für jeden Punkt z' der Kurve ist $|z'| > N$.

2°. Wenn z' ein willkürlicher Punkt von γ ist, ist $\prod_{n=1}^{m}(1+\Phi_n(x_n')) = z'$ bei passender Wahl von $m, x_1', x_2', \ldots x_m'$. $(|x_n| \leqq 1,\ n = 1, 2, \ldots . m)$.

Denn nehmen wir an, es existiere eine solche Kurve γ. Es sei dann L so grosz gewählt, dasz $\operatorname{Max}_{|z|=L} |V(z)| > K$, was möglich ist, weil V eine ganze Transzendente ist. Es

sei $N \geq L$. Dann ist das Maximum von $|V(z)|$ auf der Kurve γ gröszer als K. Es sei z' ein Punkt auf der Kurve γ, wo $|V(z')| > K$. Dann würden nach 2°. Werte m, x_1, x_2, ... x_m ($|x_n| \leq 1$, $n = 1, 2, \ldots . m$) existieren wofür

$$|V\left(\prod_{n=1}^{m}((1+\Phi_n(x_n))\right)| > K,$$

was nach (12) unmöglich ist.

Der Satz (6) wird also bewiesen sein, wenn wir zeigen können, dasz, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ divergiert, eine Kurve γ mit den beiden Eigenschaften 1°. und 2°. existiert.

b. Wir werden drei Fälle unterscheiden:

A. Keine der Zahlen r_n ist > 1, und es gibt nur eine endliche Anzahl der r_n, die gleich eins sind.

Bei der Betrachtung der Wertmenge, die von $\prod_{n=1}^{m}(1+\Phi_n(x_n))$ angenommen wird, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dasz keines der r_n gleich 1 ist. Denn wenn $r_s = 1$, können wir $x_s = 0$ nehmen. Dann trägt $1+\Phi_s(x_s)$ zum Produkt $\prod_{n=1}^{m}(1+\Phi_n(x_n))$ mit dem Faktor eins bei, und diesen können wir fortlassen.

Es seien also alle r_n kleiner als eins. Wir schneiden alle x_n-Ebenen ($n = 1, 2, \ldots .$) längs der negativen reellen Achse auf und betrachten die Wertmenge $\sum_{n=1}^{m} \log(1+\Phi_n(x_n))$, wenn die x_n ($n = 1, 2, \ldots .$) die Kreise $|x_n| < 1$ durchlaufen, und die Logarithmen ihren Hauptwert haben.

Nun gehört zur Menge der Werte, die von $1+\Phi_n(x_n)$ im Kreise $|x_n| < 1$ angenommen werden, sicher ein Kreis mit dem Radius r_n um den Punkt 1. Wenn $1+\Phi_n(x_n)$ diesen Kreis durchläuft, durchläuft $\log(1+\Phi_n(x_n))$ eine konvexe Kurve um den Nullpunkt. Um die Wertmenge

$\sum_{n=1}^{m} \log\left(1 + \Phi_n(x_n)\right)$ zu bekommen, müssen wir m konvexe Kurven addieren. Hierüber ist von H. Bohr der folgende Satz bewiesen[13]: Die Summe von m konvexen Kurven ist entweder ein Gebiet, das von einer einzigen konvexen Kurve Y_m begrenzt wird, oder ein Gebiet, das von zwei konvexen Kurven Y_m und I_m begrenzt wird, von denen I_m gänzlich innerhalb Y_m gelegen ist. Wenn alle die m ursprünglichen konvexen Kurven den Nullpunkt in ihrem Innern enthalten und e_n der Minimum-Abstand vom Nullpunkt zur n-ten Kurve ($n = 1, 2, \ldots . m$) ist, so enthält die Kurve Y_m in ihrem Innern (inkl. Rand) einen Kreis mit dem Zentrum im Nullpunkte und dem Radius $\sum_{n=1}^{m} e_n$.

Diesen Satz können wir unmittelbar auf unsern Fall anwenden. Wir können leicht beweisen, dasz eine von n unabhängige Zahl c existiert derart, dasz $e_n > c r_n$, z. B. wie folgt:

Es sei γ_n die von $\log\left(1 + \Phi_n(x_n)\right)$ durchlaufene Kurve, wenn $\Phi_n(x_n)$ den Kreis mit dem Radius r_n um den Punkt eins durchläuft. Diese Kurve ist konvex und enthält den Nullpunkt in ihrem Innern. Es seien A, B, C, D die Schnittpunkte von γ_n mit der pos. reellen, pos. imag., neg. reellen und neg. imag. Achse. Dann ergibt eine leichte Rechnung: $OA = \log(1 + r_n)$, $OB = OD = 2 \arcsin \frac{r_n}{2}$, $OC = -\log(1 - r_n)$. Es existieren also Konstanten c_1, c_2, c_3, derart dasz $OA > c_1 r_n$, $OB = OD > c_2 r_n$, $OC > c_3 r_n$. Hieraus folgt aber, dasz, wenn OE, OF, OG, OH Geraden sind, die vom Nullpunkt aus $\perp$ AB, BC, CD, DA gezogen werden, auch Konstanten c_4, c_5 existieren derart, dasz $OE = OH > c_4 r_n$, $OF = OG > c_5 r_n$. Weil aber die Kurve γ_n konvex ist, musz e_n gröszer sein

[13] H. Bohr. Om Addition af uendelig mange konvekse Kurver, Oversigt over det Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Forhandl., (1913). p. 350).

als die kürzeste der Strecken OE, OF, OG, OH, so dasz auch $e_n > c r_n$.

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ divergiert, ist also auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ divergent, so dasz wir m so grosz wählen können, dasz $\sqrt{\left(\sum_{n=1}^{m} e_n\right)^2 - \pi^2} > \log N$. Wir wählen nun auf der positiven reellen Achse auszerhalb Y_m einen veränderlichen Punkt P mit der Abszisse p und ziehen die Gerade UPV, die die Punkte $U = p + i\pi$ und $V = p - i\pi$ verbindet. Wir verschieben dann UPV so weit nach links, dasz U auf Y_m fällt. Weil die Kurve Y_m symmetrisch zur reellen Achse ist (sie ist ja die Summe von m zur reellen Achse symmetrischen Kurven), fällt dann auch V auf Y_m. Wir betrachten nun denjenigen Teil T der Kurve Y_m, der rechts von UV gelegen ist. Ist dann w ein beliebiger Punkt auf diesem Kurvenstück, so ist $Rw > \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{m} e_n\right)^2 - \pi^2} > \log N$. Bilden wir also das Kurvenstück T, das in der Ebene von $\log \prod_{n=1}^{m} (1 + \Phi_n(x_n))$ liegt, auf die Ebene von $\prod_{n=1}^{m} (1 + \Phi_n(x_n))$ ab, so erhalten wir eine grosze geschlossene Kurve, deren Punkte sämtlich weiter als N vom Nullpunkt entfernt sind. Hiermit ist die Existenz einer Kurve mit den beiden Eigenschaften 1°. und 2°. nachgewiesen.

B. Unendlich viele der r_n sind gleich eins. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dasz alle r_n gleich eins sind. Denn wenn eines der $r_n \neq 1$ ist (z. B. $r_s \neq 1$), können wir $x_s = 0$ annehmen, und der Faktor $1 + \Phi_s(x_s)$ trägt dann zum Produkt mit dem Faktor eins bei.

Wir betrachten $(1 + \Phi_1(x_1))\ (1 + \Phi_2(x_2))$. $1 + \Phi_1(x_1)$ nimmt alle Werte von der Form $1 + e^{i\theta_1} (-\pi < \theta_1 \leq \pi)$ im Einheitskreise $|x_1| < 1$ an. Ebenso nimmt $1 + \Phi_2(x_2)$

alle Werte von der Form $1+e^{i\theta_2}(-\pi<\theta_2\leqq\pi)$ an im Kreise $|x_2|<1$. Das Produkt $(1+\Phi_1(x_1))\,(1+\Phi_2(x_2))$ kan also alle Werte von der Form $(1+e^{i\theta_1})\,(1+e^{i\theta_2})$ annehmen. Zu diesen Werten gehört aber der Halbkreis mit dem Radius 2 und dem Zentrum im Nullpunkt, der rechts von der imaginären Achse gelegen ist. Denn, wenn man θ_1 und θ_2 derart bestimmen will, dasz

$$(1+e^{i\theta_1})\,(1+e^{i\theta_2})=2\,e^{i\varphi}\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}\right),$$

so musz gelten $\arg(1+e^{i\theta_1})+\arg(1+e^{i\theta_2})=\varphi$, oder

$$\theta_1+\theta_2=2\varphi, \tag{13}$$

und wenn man nun θ_2 aus der ursprünglichen Gleichung eliminiert, erhält man

$$\cos(\theta_1-\varphi)=1-\cos\varphi. \tag{14}$$

Aus (13) und (14) kann man immer Werte θ_1 und θ_2 finden, weil $-\frac{\pi}{2}\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$, und also $0\leqq\cos\varphi\leqq1$ ist.

Betrachten wir in derselben Weise die Wertmenge $(1+\Phi_3(x_3))\,(1+\Phi_4(x_4))$, so gehört auch hierzu der Halbkreis mit dem Radius 2. Wenn man aber zwei solcher Halbkreise mit einander multipliziert, bekommt man sämtliche Punkte des Kreises mit dem Radius 4 und dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Dieser letzte Kreis gehört also zur Menge der Werte von $\prod_{n=1}^{4}(1+\Phi_n(x_n))$, und hieraus folgt, dasz zur Wertmenge von $\prod_{n=1}^{4s}(1+\Phi_n(x_n))$ sämtliche Punkte eines Kreises mit dem Radius 2^{2s} um den Nullpunkt gehören. Weil 2^{2s} mit $4s$ ins Unendliche wächst, ist hiermit auch für den zweiten Fall die Existenz einer Kurve γ mit den Eigenschaften 1°. und 2°. bewiesen.

C. Einer der Radien r_n ist gröszer als 1.

Wenn nur einer der Radien r_n gröszer als 1 ist, können

wir die Beweisführung des Falles A oder B anwenden und dabei denjenigen Faktor, wofür $r_n > 1$, aus dem Produkte $\Pi\left(1 + \Phi_n(x_n)\right)$ fortlassen. Wir können also annehmen, dasz zwei Radien r_n gefunden werden können, die gröszer als 1 sind, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dasz dies r_1 und r_2 sind. Wir betrachten die Wertmenge von $\left(1 + \Phi_1(x_1)\right)\left(1 + \Phi_2(x_2)\right)$. Zu dieser Menge gehört im besondern die Produktmenge, die man erhält, wenn man die zwei Kreise mit den Radien r_1 und r_2 um den Punkt 1 mit einander multipliziert, und noch spezieller: die Produktmenge, die man bekommt, wenn man alle Punkte des Kreises mit dem Radius r_1 multipliziert mit dem Punkte $1 + r_2$ des Kreises mit dem Radius 2. Diese letzte Menge ist aber eine geschlossene Kurve, die den Nullpunkt in ihrem Innern enthält und gänzlich auszerhalb des Kreises mit dem Radius $(r_1 - 1)(1 + r_2)$ um den Nullpunkt liegt.

Hieraus folgt, dasz zur Menge $\prod_{n=1}^{m}\left(1 + \Phi_n(x_n)\right)$ eine Kurve γ gehört, die den Nullpunkt in ihrem Innern enthält und gänzlich auszerhalb des Kreises mit dem Radius $(r_1 - 1)\prod_{n=2}^{m}(1 + r_n)$ liegt, weil man $x_n\,(n = 2, 3 \ldots . m)$ so wählen kann, dasz $1 + \Phi_n(x_n) = 1 + r_n$ $(n = 3, 4, \ldots . m)$. Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ divergiert, kann man nun m so grosz nehmen, dasz $(r_1 - 1)\prod_{n=2}^{m}(1 + r_n) > N$, womit auch für den dritten Fall die Existenz einer Kurve γ mit den Eigenschaften 1°. und 2°. nachgewiesen ist.

Weil immer einer der 3 Fälle zutrifft, ist hiermit der Satz 6 bewiesen.

Hieraus können wir leicht die absolute Konvergenz der Potenzreihe der unendlich vielen Variabeln beweisen. Dazu

wenden wir wieder den am Anfang des § 3 genannten Bohr-schen Satz an.

Beweis des Hauptsatzes für den zweiten Fall.

Es sei wieder Θ die im Anfang des § 1 definierte Zahl des Intervalles $0 < \Theta < 1$. Wir wollen die absolute Konvergenz von $P(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$ beweisen im Gebiete $|x_n| \leq \Theta$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dazu wählen wir eine Zahl ϱ derart, dasz $\Theta < \varrho < 1$, z. B. $\varrho = \frac{1+\Theta}{2}$.

Ist dann

$$\Phi_n(x_n) = \sum_{s=1}^{s} b_s^{(n)} x_n^s, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

so können wir, gerade so wie im § 3 für $\mathfrak{P}_n(x_n)$ ausgeführt ist, beweisen, dasz

$$\sum_{s=1}^{s} |b_s^{(n)}| \Theta^s \leq \frac{2k_2 \Theta r_n}{1-\Theta},$$

wo k_2 eine nur von Θ abhängige Konstante ist.

Hieraus folgt nach Satz 6, dasz das Produkt

$$\prod_{n=1}^{s} \left(1 + \sum_{s=1}^{s} |b_s^{(n)}| \Theta^s\right)$$

konvergiert. Daher ist auch, wenn $V(z) = \sum_{r=0}^{s} \gamma_r z^r$, die Reihe

$$\sum_{r=0}^{s} |\gamma_r| \left(\prod_{n=1}^{s} \left(1 + \sum_{s=1}^{s} |b_s^{(n)}| \Theta^s\right)\right)^r$$

konvergent. Also ist die Potenzreihe $P(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$ für $|x_n| < \Theta$ $(n = 1, 2, \ldots)$ absolut konvergent.

Haag, 22. Mai 1923.

H. D. Kloosterman.

Færdig fra Trykkeriet den 22. August 1923.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **V**, 7.

NOTES SUPPLÉMENTAIRES

SUR LES

ÉQUATIONS DE LAGRANGE

ÉTUDE DE NIELS NIELSEN ET GEORG RASCH

PUBLIÉE PAR

NIELS NIELSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1923

I.

Sur le rang d'un nombre premier.

Soit la base a résidu quadratique du nombre premier impair p, nous avons récemment démontré, M. Rasch et moi[1], que le rang de p par rapport à la base a est diviseur de $p-1$.

Plus tard nous avons poussé un peu plus loin nos recherches sur le rang des nombres premiers, et M. Rasch a démontré le théorème intéressant:

I. Soit r le rang du nombre premier impair p, par rapport à la base a, qui n'est pas multiple de p, on aura, quels que soient du reste a et p,

$$p-\left(\frac{a}{p}\right) \equiv 0 \pmod{r}, \tag{1}$$

où $\left(\frac{a}{p}\right)$ désigne, comme ordinairement, le symbole de Legendre.

En appliquant, avec certaines modifications, la démonstration de M. Rasch, nous partons des formules de Lagrange

$$A_p = \sum_{s=0}^{s=\frac{p}{2}} \binom{p}{2s} a^s B_1^{2s} A_1^{p-2s}$$

$$B_p = \sum_{s=0}^{s=\frac{p-1}{2}} \binom{p}{2s+1} a^s B_1^{2s+1} A_1^{p-2s-1},$$

[1] Voir l'article XV de mon Mémoire: Recherches sur les équations de Lagrange.

et en déduisons les congruences

$$A_p \equiv A_1^p \equiv A_1 \pmod{p} \tag{2}$$

$$B_p \equiv a^{\frac{p-1}{2}} B_1^p \equiv \left(\frac{a}{p}\right) B_1 \pmod{p}. \tag{3}$$

Posons ensuite, dans l'équation de Fermat ayant la base a,

$$A_1^2 - aB_1^2 = (-1)^\varepsilon, \tag{4}$$

les formules d'addition de Lagrange

$$A_{p-1} = (-1)^\varepsilon (A_1 A_p - aB_1 B_p), \quad B_{p-1} = (-1)^\varepsilon (A_1 B_p - B_1 A_p)$$
$$A_{p+1} = A_1 A_p + aB_1 B_p, \quad B_{p+1} = A_1 B_p + B_1 A_p$$

donnent immédiatement, en vertu de (2) et (3),

$$A_{p-1} \equiv (-1)^\varepsilon \left(A_1^2 - \left(\frac{a}{p}\right) aB_1^2\right) \pmod{p} \tag{5}$$

$$B_{p-1} \equiv (-1)^\varepsilon \left(1 - \left(\frac{a}{p}\right)\right) A_1 B_1 \pmod{p} \tag{6}$$

$$A_{p+1} \equiv A_1^2 + \left(\frac{a}{p}\right) aB_1^2 \pmod{p} \tag{7}$$

$$B_{p+1} \equiv \left(1 + \left(\frac{a}{q}\right)\right) A_1 B_1 \pmod{p}. \tag{8}$$

Soit maintenant a résidu de p, savoir

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 1,$$

il résulte, en vertu de (5) et (6),

$$A_{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \tag{9}$$

$$B_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}, \tag{10}$$

et la dernière de ces deux congruences donnera immédiatement

$$p - 1 \equiv 0 \pmod{r}. \tag{11}$$

Soit, au contraire, a non-résidu de p, savoir

$$\left(\frac{a}{p}\right) = -1,$$

les congruences (7) et (8) donnent de même

$$A_{p+1} \equiv (-1)^{\varepsilon} \pmod{p} \tag{12}$$

$$B_{p+1} \equiv 0 \pmod{p}, \tag{13}$$

de sorte que l'on aura ici

$$p+1 \equiv 0 \pmod{r}. \tag{14}$$

Et il est évident que les deux congruences (11) et (14) donnent immédiatement le théorème I.

Or, il est possible de compléter les résultats ainsi obtenus.

A cet effet, partons de la formule

$$2aB_{\mu}^2 = A_{2\mu} - (-1)^{\mu\varepsilon},$$

où μ est un positif entier quelconque, tandis que ε est l'exposant défini par la formule (4), nous aurons immédiatement, en vertu de (9) et (12), et en posant respectivement $2\mu = p-1$, $2\mu = p+1$,

$$2aB_{\frac{p-1}{2}}^2 \equiv 1 - (-1)^{\frac{p-1}{2}\varepsilon} \pmod{p} \tag{15}$$

$$2aB_{\frac{p+1}{2}}^2 = (-1)^{\varepsilon} - (-1)^{\frac{p+1}{2}\varepsilon} \pmod{p}, \tag{16}$$

et la congruence (15) donnera immédiatement la proposition:

II. Soit a une base de seconde espèce, ou soit p de la forme $4k+1$, on aura toujours

$$\frac{p-1}{2} \equiv 0 \pmod{r}, \tag{17}$$

de sorte que le rang de p est une aliquote de $p-1$.

Quant à la congruence (16), elle se présente aussi sous la forme

$$(18) \qquad 2aB^2_{\frac{p+1}{2}} \equiv (-1)^{\varepsilon}\left(1-(-1)^{\frac{p-1}{2}\varepsilon}\right) \pmod{r},$$

ce qui donnera cette autre proposition, analogue à la précédente:

III. Soit a une base de seconde espèce, ou soit p de la forme $4k+1$, on aura toujours

$$(19) \qquad \frac{p+1}{2} \equiv 0 \pmod{r},$$

de sorte que le rang de p est une aliquote de $p+1$.

Cela posé, il est évident que la valeur maximum $p-1$ ou $p+1$ du nombre premier p est toujours exclue, à moin que la base ne soit de première espèce et le nombre premier p soit de la forme $4k+3$.

On voit immédiatement que le théorème III, p. 65 de mon Mémoire susdit, n'est pas démontré, parce que la remarque jointe à ce théorème est erronée, et il est facile de voir que le théorème susdit est faux, car le nombre premier

$$239 = 4\cdot 59+3$$

est, par rapport à la base 2, du rang 14, et l'on aura

$$238 = 14\cdot 17.$$

Mais quoi qu'il en soit, il existe des nombres premiers p du rang $p\pm 1$.

Soit par exemple $a=2$, 7 est du rang 6, 11 du rang 12.

Dans l'article qui suit, nous avons à démontrer des propriétés interessantes des nombres premiers du rang maximum.

II.

Sur les nombres premiers du rang maximum.

Les nombres premiers du rang maximum, par rapport à un certaine base a, jouent un rôle assez important pour les équations de Lagrange ayant la base a, ce qui est mis en pleine lumière par les théorèmes suivants:

I. Supposons que le nombre premier p, du rang $p-1$ par rapport à la base a, ne divise pas le paramètre ω, les deux équations de Lagrange

$$(1) \qquad u^2 - av^2 = \pm\omega, \quad u^2 - (ap^2)v^2 = (-1)^{\vartheta}\omega$$

sont en même temps résolubles ou non, et, en cas de résolubilité, ces deux équations sont du même genre.

En effet, soit

$$(2) \qquad (u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_n, v_n), \ldots.$$

une suite quelconque, formée des solutions de la première des équations (1), il s'agit de démontrer une congruence de la forme

$$(3) \qquad v_\mu \equiv 0 \pmod{p}, \quad 1 \leqq \mu \leqq p-1,$$

pourvu que le paramètre ω ne soit pas multiple de p.

A cet effet, considérons tout d'abord l'hypothèse $\mu = 1$, savoir

$$(4) \qquad v_1 \equiv 0 \pmod{p},$$

le nombre premier p est, par rapport à la suite (2), de l'ordre 1.

Appliquons ensuite la congruence

$$A_{2\nu+1} \equiv 0 \pmod{p}, \quad p = 4\nu+3, \tag{5}$$

démontrée par M. Rasch, dans mon Mémoire susdit, il résulte, en vertu de la formule récursive générale

$$v_{r+1} = u_1 B_r + v_1 A_r, \tag{6}$$

que la congruence

$$v_{2\nu+2} \equiv 0 \pmod{p} \tag{7}$$

entraîne cette autre

$$u_1 \equiv 0 \pmod{p}. \tag{7 bis}$$

Abstraction faite de ces deux cas spéciaux, nous avons donc à étudier les congruences

$$u_1 B_r + v_1 A_r \equiv 0 \pmod{p}, \tag{8}$$

où ni u_1 ni v_1 n'est multiple de p.

A cet effet, supposons ou

$$1 \leq r \leq 2\nu \tag{9}$$

ou

$$2\nu+2 \leq r \leq 4\nu+1, \tag{9 bis}$$

puis posons

$$u_1 = \alpha + pk, \quad v_1 = \beta + pk_1, \tag{10}$$

où k et k_1 sont des entiers non négatifs, tandis que

$$1 \leq \alpha \leq p-1, \quad 1 \leq \beta \leq p-1, \tag{10 bis}$$

nous désignons par le symbole (α, β) les deux équations (10), suppléées par les conditions (10 bis), et la congruence (8) se transforme en celle-ci

$$A_r \beta + B_r \alpha \equiv 0 \pmod{p}. \tag{11}$$

Supposons ensuite tout d'abord que r soit un indice fixe, puis introduisons, dans (11), successivement

$$\alpha = 1, 2, 3, \ldots, p-1, \tag{12}$$

nous aurons, pour β, les valeurs inégales

$$\beta = s_1^{(r)}, s_2^{(r)}, \ldots . s_{p-1}^{(r)}, \tag{12 bis}$$

de sorte que ces valeurs de β ne sont autre chose que les nombres (12), pris dans un ordre inconnu.

Cela posé, nous avons tout d'abord à démontrer l'impossibilité d'une équation de la forme

$$s_\mu^{(r)} = s_\mu^{(q)},$$

où r et q sont des indices inégaux.

A cet effet, supposons que les deux congruences

$$A_r\beta + B_r\alpha \equiv 0 \pmod{p}$$
$$A_q\beta + B_q\alpha \equiv 0 \pmod{p}$$

soient satisfaites par les mêmes valeurs du couple (α, β), nous aurons, en éliminant β, puis supposant $q > r$,

$$B_{q-r}\alpha \equiv 0 \pmod{p},$$

ce qui est impossible parce que ni α ni B_{q-r} ne peut être multiple de p, car on aura évidemment

$$q - r < p - 1,$$

et B_{p-1} est le premier des nombres B_μ qui soit divisible par p.

Ces remarques faites, il est évident que les

$$4\nu(p-1) = (p-1)(p-3)$$

valeurs du couple (α, β), ainsi déterminées à l'aide des nombres (12) et (12 bis), sont inégales, de sorte qu'il ne nous reste que d'étudier la congruence

(14) $$u^2 - av^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

toujours résoluble, parce que a est résidu quadratique de p.

A cet effet, désignons par

(15) $$r_1, r_2, \ldots, r_{2\nu+1}, \quad 1 \leq r_\varkappa \leq p-1$$

les résidus quadratiques de p, de sorte que

(15 bis) $$r_\sigma \equiv a \pmod{p},$$

la congruence (14) n'est autre chose que celle-ci

(16) $$r_\gamma \equiv r_\sigma r_\varkappa \pmod{p},$$

et cette congruence est certainement résoluble, parce que p et r_σ sont premiers entre eux.

Quant aux valeurs de u et v, tirées de la congruence (14), posons

$$r_\mu \equiv \alpha_\mu^2 \equiv (p-\alpha_\mu)^2 \pmod{p},$$

où nous avons constamment

$$1 < \alpha_\mu < p-1$$

pour toutes les valeurs de l'indice μ, savoir

$$1 < \mu < 2\nu+1.$$

Remarquons ensuite que la congruence (16) exclut cette autre

$$r_\lambda \equiv r_\sigma r_\mu \pmod{p}, \quad \varkappa \neq \mu,$$

il est évident que la congruence (16) donnera précisément

$$2p-2$$

valeurs inégales du couple (α, β), savoir, pour α les valeurs

(17) $$\alpha = \alpha_\lambda, \quad \alpha = p-\alpha_\lambda,$$

et, pour β les valeurs correspondantes

(18) $$\beta = \alpha_\varkappa, \quad \beta = p-\alpha_\varkappa$$

ou

(18 bis) $$\beta = p - \alpha_z, \quad \beta = \alpha_z.$$

Cela posé, nous avons encore à démontrer que les $2p-2$ valeurs du couple (α, β) ainsi déterminées, par les formules (17) et (18), sont différentes des $(p-1)(p-3)$ valeurs du couple (α, β), déterminées par les congruences (11).

Or, supposons que les deux congruences

$$A_r\beta + B_r\alpha \equiv 0 \pmod{p}$$
$$\alpha^2 - a\beta^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

soient simultanément résolubles, nous aurons, en éliminant α,

$$(A_r^2 - aB_r^2)\beta^2 \equiv (-1)^r\beta^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

ce qui est inadmissible, parce que β n'est pas divisible par p.

Les valeurs du couple (α, β), déterminées par les formules (12), (17) et (18), épuisent donc toutes les $(p-1)^2$ valeurs possibles de ce couple, de sorte que, ω n'étant pas multiple de p, les deux équations (1) sont simultanément résolubles ou non, et, en cas de résolubilité, ces deux équations sont du même genre parce que (2) est une suite quelconque, formée des solutions de la première de ces deux équations.

Quant au calcul des solutions de la dernière des équations susdites, savoir

(19) $$u^2 - (ap^2)v^2 = (-1)^\vartheta\omega,$$

à l'aide de celles de la première de ces deux équations, appliquons les formules récursives de Lagrange

$$A_{k+r} = A_kA_r + aB_kB_r, \qquad B_{k+r} = A_kB_r + B_kA_r$$
$$(-1)^kA_{k-r} = A_kA_r - aB_kB_r, \quad (-1)^kB_{k-r} = B_kA_r - A_kB_r,$$

où il faut admettre, dans les deux dernières, $k > r$, puis posons

$$k = \frac{p-1}{2} = 2r+1,$$

il résulte, en vertu de (5)

$$(20)\quad \begin{cases} A_{k+r} \equiv A_{k-r} \pmod{p} \\ B_{k+r} \equiv -B_{k-r} \pmod{p}, \end{cases}$$

ce qui donnera la proposition:

II. Supposons remplies les conditions indiquées dans le théorème I, une des congruences

$$(21)\quad A_r v_1 \pm B_r u_1 \equiv 0 \pmod{p}, \quad 1 < r < \frac{p-3}{2},$$

est toujours résoluble.

Quant à la solution primitive d'une suite formée de solutions de l'équation (19), supposons applicable, dans la congruence (21), le signe positif, p est de l'ordre $r+1$, et la solution primitive de la suite susdite appartenant à l'équation (19) deviendra

$$(22)\quad \left(u_1 A_r + a v_1 B_r, \quad \frac{1}{p}(v_1 A_r + u_1 B_r)\right).$$

Soit, au contraire, valable la congruence (21) pour le signe négatif, le nombre premier p divise

$$v_{2k-r+1} = v_{p-r}$$

et par conséquent aussi le nombre

$$v'_r,$$

où (u'_n, v'_n) est l'élément général de la suite coordonnée à celle qui contient (u_n, v_n), et la solution primitive deviendra, dans ce cas,

$$(23)\quad \left(u'_1 A_{r-1} + a v'_1 B_{r-1}, \quad \frac{1}{p}(u'_1 B_{r-1} + v'_1 A_{r-1})\right),$$

où il faut admettre, comme ordinairement,

$$A_0 = 1, \quad B_0 = 0.$$

Or, les formules fondamentales de la théorie des suites coordonnées donnent, en vertu de (23), pour la solution primitive du couple susdit, cette autre expression

(23 bis) $$\left(| u_r A_r - a v_1 B_r |, \quad \frac{1}{p} | u_1 B_r - v_1 A_r | \right),$$

de sorte que le calcul de la solution (u'_1, v'_1) réciproque de (u_1, v_1) n'est pas nécessaire pour la détermination de l'élément primitif des deux suites coordonnées appartenant à l'équation (19).

Quant aux cas spéciaux qui correspondent à une des congruences (4) et (7 bis), on aura, comme élément primitif des suites coordonnées appartenant à l'équation (19)

(24) $$\left(u_1, \frac{1}{p} v_1 \right)$$

respectivement

(24 bis) $$\left(u_1 A_k + a v_1 B_k, \quad \frac{1}{p} (u_1 B_k + v_1 A_k) \right),$$

où il faut admettre

$$k = 2\nu + 1 = \frac{p-1}{2}.$$

Supposons maintenant que la base a de première espèce soit résidu quadratique du nombre premier

$$p = 4\nu + 1,$$

nous savons que le rang ϱ de p, par rapport à la base a est diviseur du nombre

$$\frac{p-1}{2} = 2\nu,$$

de sorte qu'il n'est pas sûr que les deux équations (1) soient simultanément résolubles, et, en cas de résolubilité simultanée, ces deux équations ne sont pas généralement du même genre.

Dans le cas, où le rang ϱ est un nombre pair, savoir

$$\varrho = 2k,$$

nous aurons toujours

$$A_k \equiv 0 \pmod{p},$$

de sorte que la résolubilité de la seconde des équations (1) exige, abstraction faite des deux cas évidents

$$v_1 \equiv 0 \pmod{p}, \quad u_1 \equiv 0 \pmod{p},$$

l'existence d'une des congruences (21), où l'indice r satisfait aux conditions

$$1 < r < k-1.$$

Étudions par exemple la base la plus simple de première espèce, savoir

$$a = 2,$$

nous aurons, pour les premières solutions de l'équation de Fermat correspondante, les expressions

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{c} (1,1)\ (3,2)\ (7,5)\ (17,12)\ (41,29)\ (99,70) \\ (239,169). \end{array} \right.$$

Cela posé, il est évident que le nombre premier 7 est du rang 6, par rapport à la base 2, supposons donc que le paramètre ω ne soit pas multiple de 7, les deux équations

$$(26) \qquad u^2 - 2v^2 = \pm\omega, \quad u^2 - 98v^2 = (-1)^\delta\omega$$

sont en même temps résolubles ou non, et, en cas de résolubilité, ces deux équations sont du même genre.

De plus, il résulte, en vertu de la suite (25), que le nombre premier 17 est, par rapport à la base 2, du rang 8, de sorte que la résolubilité de l'équation

$$u^2 - 378\,v^2 = (-1)^{\vartheta}\omega\,,$$

où tous les facteurs premiers de ω sont nécessairement, comme dans les équations (26), de la forme $8\nu \pm 1$, exige l'existence d'une des six congruences

$$\begin{aligned} v_1 \pm u_1 &\equiv 0 \pmod{17} \\ 3v_1 \pm 2u_1 &\equiv 0 \pmod{17} \\ 7v_1 \pm 5u_1 &\equiv 0 \pmod{17}. \end{aligned}$$

Quant à la seconde valeur maximum $p+1$ du nombre premier p, nous avons à démontrer le théorème:

III. Supposons que le nombre premier impair p soit, par rapport à la base a, du rang $p+1$, les deux équations de Lagrange

$$(27) \qquad u^2 - a\,v^2 = \pm\omega\,, \quad u^2 - (ap^2)\,v^2 = (-1)^{\vartheta}\omega$$

sont, quels que soient du reste a et p, simultanément résolubles ou non, et, en cas de résolubilité, ces deux équations sont du même genre.

En effet, posons

$$p = 2\nu + 1\,,$$

nous aurons

$$A_\nu \equiv 0 \pmod{p};$$

remarquons ensuite que les congruences (8) épuisent, pour

$$1 \leqq r \leqq \nu - 1\,, \quad \nu + 1 \leqq r \leqq 2\nu - 1\,,$$

toutes les $(p-1)^2$ valeurs possibles du couple (α, β), la démonstration du théorème III est évidente.

De plus, la solution primitive de la dernière des équa-

tions (27) se détermine à l'aide des expressions (23) et (23 bis), où il faut admettre

$$1 \leq r \leq \nu - 1.$$

Remarquons, en passant, que la méthode appliquée, dans la démonstration des théorèmes I et III, montrera clairement que le rang du nombre premier impair p, par rapport à une base quelconque a, ne peut jamais dépasser $p+1$, ce qui est, au contraire, possible pour le rang du nombre composé p.

Revenons maintenant à la base $a = 2$, il résulte, en vertu de la suite (25), que les nombres premiers

$$3 \quad 11 \quad 19$$

sont, par rapport à la base $a = 2$, respectivement du rang

$$4 \quad 12 \quad 20,$$

de sorte que les équations

$$(28) \quad \begin{cases} u^2 - 18v^2 = (-1)^{\vartheta}\omega, \quad u^2 - 242v^2 = (-1)^{\vartheta_1}\omega, \\ u^2 - 722v^2 = (-1)^{\vartheta_2}\omega \end{cases}$$

sont toujours résolubles et du genre maximum, pourvu que tous les facteurs premiers du paramètre ω soient de la forme $8\nu \pm 1$, sinon les équations (28) sont irrésolubles toutes les trois.

En terminant cette Note, nous avons encore à regarder l'hypothèse

$$a = 2, \quad p = 13;$$

remarquons que 13 est, par rapport à la base 2, du rang 7, la résolubilité de l'équation

$$(29) \qquad u^2 - 338v^2 = \pm\omega$$

exige que tous les facteurs premiers de ω soient de la forme $8v \pm 1$, et que 13 divise un des nombres

$$v_1, \quad v_1 + u_1, \quad 3v_1 + 2u_1, \quad 6v_1 - 5u_1,$$
$$2v_1 - u_1, \quad 2v_1 + 3u_1, \quad v_1 - u_1.$$

Or, remarquons que 13 est, par rapport à la base 2, de la hauteur 2, parce que $B_7 = 169$, il n'est pas sûr que l'équation (29), supposée résoluble, soit du genre maximum, ce qui a toujours lieu pour les équations (26) et (28).

III.

Sur la multiplication des équations de Lagrange.

Dans un Mémoire récent[1], j'ai souvent appliqué la multiplication de deux équations de Lagrange qui correspondent ou au même paramètre ou à des paramètres premiers entre eux.

M. Rasch a poussé plus loin ces recherches, en étudiant la multiplication de deux équations de Lagrange aux paramètres quelconques.

En suivant le développement de M. Rasch, nous remarquons tout d'abord que l'équation de Lagrange

$$u^2 - a v^2 = (-1)^\delta \omega \tag{1}$$

n'est jamais résoluble, à moins que a ne soit résidu quadratique de ω; c'est-à-dire qu'il existe un positif entier b, tel que

$$a \equiv b^2 \pmod{\omega}, \tag{2}$$

ce qui donnera, en vertu de (1),

$$(u + b v)(u - b v) \equiv 0 \pmod{\omega}. \tag{3}$$

Remarquons ensuite que le nombre 2 est le seul diviseur commun des deux facteurs

$$u + b v, \quad u - b v \tag{4}$$

qui divise aussi ω, car un diviseur commun des deux nombres (4) est aussi diviseur de leur somme $2u$, et u et

[1] Recherches sur les équations de Lagrange.

ω sont premiers entre eux; c'est-à-dire qu'il existe une décomposition de la forme

$$\omega = \omega_1 \omega_2 \tag{5}$$

ou de la forme

$$\frac{\omega}{2} = \omega_1 \omega_2 , \tag{5 bis}$$

selon que ω est impair ou pair, et où ω_1 et ω_2 sont premiers entre eux, de sorte que l'on aura simultanément

$$u + bv \equiv 0 \pmod{\omega_1}, \quad u - bv \equiv 0 \pmod{\omega_2}. \tag{6}$$

En effet, ces deux congruences sont évidentes, pourvu que ω soit un nombre impair; soit, au contraire, ω un nombre pair, un des premiers membres des congruences (6) est un nombre de la forme $4k+2$, parce que leur somme $2u$ est précisément de cette forme.

Ces remarques faites, il est facile de démontrer le lemme fondamental:

I. A chaque couple de suites coordonnées, formées des solutions de l'équation (1), correspond une décomposition de la forme (5) ou (5 bis), où ω_1 et ω_2 sont premiers entre eux.

En premier lieu, il est évident qu'une solution quelconque de l'équation (1), exige une décomposition de la forme susdite, de sorte que les congruences (6) soient remplies.

Soient, en second lieu, (u_1, v_1) et (u_2, v_2) deux solutions de l'équation (1) qui correspondent à la même décomposition (5) ou (5 bis), il existe des exposants m et n, tels que

$$\begin{cases} u_1 + (-1)^m b v_1 \equiv 0 \pmod{\omega_1}, \\ u_1 - (-1)^m b v_1 \equiv 0 \pmod{\omega_2}. \end{cases} \tag{7}$$

$$(7\text{ bis})\quad \begin{cases} u_2 + (-1)^n b v_2 \equiv 0 \pmod{\omega_1}, \\ u_2 - (-1)^n b v_2 \equiv 0 \pmod{\omega_2}, \end{cases}$$

Multiplions ensuite les deux premières, respectivement les deux dernières, des congruences (7) et (7 bis), nous aurons, en posant

$$m + n = p,$$

puis tenant compte de la congruence (2), les deux autres congruences

$$u_1 u_2 + (-1)^p a v_1 v_2 \pm b(u_2 v_1 + (-1)^p u_1 v_2) \equiv 0 \pmod{\omega},$$

ce qui donnera

$$\begin{aligned} u_1 u_2 + (-1)^p a v_1 v_2 &\equiv 0 \pmod{\omega} \\ u_2 v_1 + (-1)^p u_1 v_2 &\equiv 0 \pmod{\omega}, \end{aligned}$$

car ω et b sont premiers entre eux. Et ces deux dernières congruences ne sont possibles à moins que les deux solutions (u_1, v_1) et (u_2, v_2) n'appartiennent au même couple de suites coordonnées.

Nous remarquons expressément qu'il existe généralement des décompositions de la forme (5) ou (5 bis), auxquelles ne correspond aucune solution de l'équation (1), ce qui a toujours lieu, pourvu que cette équation ne soit pas du genre maximum.

Supposons ensuite que le paramètre ω de l'équation (1) contienne r facteurs premiers inégaux, il existe précisément 2^r décompositions de la forme (5) ou (5 bis), pourvu que ω ne soit pas de la forme $4k+2$; dans ce cas, le nombre des décompositions susdites se réduit à 2^{r-1}.

Cela posé, nous avons de nouveau démontré le théorème, essentiel dans la théorie des équations de Lagrange:

II. Supposons que le paramètre ω contienne r facteurs premiers inégaux, le genre de l'équation

(1) est au plus égal à 2^{r-1} ou à 2^r, selon que ω est de la forme $4k+2$ ou non.

Étudions maintenant la multiplication des deux équations de LAGRANGE

$$(8) \qquad u^2 - av^2 = (-1)^{\vartheta_1}\omega_1, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\vartheta_2}\omega_2,$$

dont les paramètres ω_1 et ω_2 ont ou le plus grand commun diviseur impair ϱ ou le plus grand commun diviseur pair 2ϱ, puis posons

$$(9) \qquad \omega_1 = \varrho\sigma, \quad \omega_2 = \varrho\tau$$

respectivement

$$(9\text{ bis}) \qquad \omega_1 = 2\varrho\sigma, \quad \omega_2 = 2\varrho\tau,$$

les nombres σ et τ sont toujours premiers entre eux.

Posons ensuite

$$(10) \qquad \varrho = \varrho_1\varrho_2\varrho'_1\varrho'_2,$$

où les quatre facteurs qui figurent au second membre sont deux à deux premiers entre eux, puis choisissons ces quatre facteurs, de sorte qu'il existe une solution (u_1, v_1) et (u_2, v_2) de chacune des équations (8) qui satisfont, en vertu de (2) et (6), aux congruences

$$(11) \qquad u_1 + bv_1 \equiv 0 \pmod{\varrho_1\varrho_2}, \quad u_1 - bv_1 \equiv 0 \pmod{\varrho'_1\varrho'_2}$$
$$(11\text{ bis}) \qquad u_2 + bv_2 \equiv 0 \pmod{\varrho_1\varrho'_1}, \quad u_2 - bv_2 \equiv 0 \pmod{\varrho_2\varrho'_2}.$$

nous aurons, par le même procédé que dans le cas précédent,

$$(12) \qquad u_1u_2 + av_1v_2 \equiv u_1v_2 + u_2v_1 \equiv 0 \pmod{\varrho'_1\varrho_2}$$
$$(12\text{ bis}) \qquad u_1u_2 - av_1v_2 \equiv u_1v_2 - u_2v_1 \equiv 0 \pmod{\varrho_1\varrho'_2}.$$

Cela posé, je dis que les deux nombres entiers

$$(13) \qquad \alpha = \frac{uu_1 + av_1v_2}{\varrho'_1\varrho_2}, \quad \beta = \frac{u_1v_2 + u_2v_1}{\varrho'_1\varrho_2}$$

ne peuvent jamais avoir d'autres facteurs communs que les nombres 1 et 2, et que c'est la même chose pour ces deux autres nombres entiers

$$(13\text{ bis}) \qquad \varkappa = \frac{u_1 u_2 - a v_1 v_2}{\varrho_1 \varrho_2'}, \quad \lambda = \frac{u_1 v_2 - u_2 v_1}{\varrho_1 \varrho_2'}.$$

Quant à la démonstration de ce postulat, nous pouvons évidemment nous borner à l'étude des nombres α et β.

Soit donc k le plus grand commun diviseur de α et β, de sorte que

$$\begin{aligned} u_1 u_2 + a v_1 v_2 &\equiv 0 \pmod{k \varrho_1' \varrho_2} \\ u_1 v_2 + u_2 v_1 &\equiv 0 \pmod{k \varrho_1' \varrho_2}, \end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} (u_1^2 - a v_1^2) u_2 v_2 &\equiv 0 \pmod{k \varrho_1' \varrho_2} \\ (u_2^2 - a v_2^2) u_1 v_1 &\equiv 0 \pmod{k \varrho_1' \varrho_2}, \end{aligned}$$

ce qui donnera

$$2 \varrho_1 \varrho_2' \sigma \equiv 2 \varrho_1 \varrho_2' \tau \pmod{k};$$

c'est-à-dire que nous aurons nécessairement

$$2 \varrho_1 \varrho_2' \equiv 0 \pmod{k},$$

car σ et τ sont premiers entre eux. Et cette dernière congruence entraîne, en vertu de (13 bis), ces deux autres

$$u_1 u_2 - a v_1 v_2 \equiv u_1 v_2 - u_2 v_1 \equiv 0 \pmod{k},$$

ce qui donnera finalement

$$2 u_1 u_2 \equiv 2 a v_1 v_2 \equiv 2 u_1 v_2 \equiv 2 u_2 v_1 \equiv 0 \pmod{k},$$

congruences qui ne sont possibles que pour

$$k = 1, \quad k = 2,$$

et il est évident que les hypothèses (9 bis) donnent toujours

$$k = 2.$$

Dans ce cas, les deux nombres entiers

$$(14) \qquad \alpha_1 = \frac{u_1 u_2 + a v_1 v_2}{2 \varrho'_1 \varrho_2}, \quad \beta_1 = \frac{u_1 v_2 + u_2 v_1}{2 \varrho'_1 \varrho_2}$$

sont premiers entre eux, et c'est la même chose pour

$$(14\text{ bis}) \qquad \varkappa_1 = \frac{u_1 u_2 - a v_1 v_2}{2 \varrho_1 \varrho'_2}, \quad \lambda_1 = \frac{u_1 v_2 - u_2 v_1}{2 \varrho_1 \varrho'_2}.$$

Cela posé, nous avons démontré la proposition:

III. Choisissons, comme nous venons de l'indiquer, les quatre facteurs ϱ_1, ϱ'_1, ϱ_2, ϱ'_2, la multiplication des deux équations (8) conduira à ces deux autres équations résolubles

$$(15) \qquad u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta_1 + \delta_2} (\varrho_1 \varrho'_2)^2 \sigma \tau$$

$$(16) \qquad u^2 - a v^2 = (-1)^{\delta_1 + \delta_2} (\varrho'_1 \varrho_2)^2 \sigma \tau.$$

En effet, on voit que ces équations admettent ou la solution (α, β) respectivement $(\varkappa, \lambda)$ ou la solution (α_1, β_1) respectivement $(\varkappa_1, \lambda_1)$, selon que les deux paramètres ω_1 et ω_2 ont leur plus grand commun diviseur impair ou pair.

Quant aux solutions des équations (15) et (16), supposons que les solutions (u_1, v_1) et (u_2, v_2) correspondent respectivement aux décompositions

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2, \quad \tau = \tau_1 \cdot \tau_2,$$

je dis que les solutions susdites correspondent aux décompositions

$$\varrho_1^2 \sigma_1 \tau_1 \cdot \varrho_1'^2 \sigma_2 \tau_2, \quad \varrho_2^2 \sigma_1 \tau_2 \cdot \varrho_2'^2 \sigma_2 \tau_1.$$

En effet, les congruences (11) et (11 bis) deviennent ici

$$(17) \qquad \begin{cases} u_1 + b v_1 \equiv 0 \pmod{\varrho_1 \varrho_2 \sigma_1} \\ u_1 - b v_1 \equiv 0 \pmod{\varrho'_1 \varrho'_2 \sigma_2} \end{cases}$$

respectivement

$$(17\text{ bis})\quad \begin{cases} u_2 + bv_2 \equiv 0 \pmod{\varrho_1 \varrho_1' \tau_1} \\ u_2 - bv_2 \equiv 0 \pmod{\varrho_2 \varrho_2' \tau_2}, \end{cases}$$

et nous aurons immédiatement le résultat susdit, en multipliant les congruences (17) et (17 bis).

Forelagt paa Mødet den 9. Februar 1923.
Færdig fra Trykkeriet den 8. September 1923.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **V**, 8.

THE OPTICAL SPECTRUM OF HAFNIUM

BY

H. M. HANSEN AND S. WERNER

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1923

The present paper gives the detailed account of our measurements of the optical spectrum of hafnium which was announced in our preliminary note on this subject[1]. As well known, the element hafnium (Hf) of atomic number 72 was discovered in zirconium minerals by COSTER and HEVESY about a year ago[2]. Our investigations were started as early as possible during the progress of the work of COSTER and HEVESY on the concentration and isolation of hafnium. It was found that the spectrum of hafnium, in similarity with the spectra of the other elements in the same group of the periodic system of the elements, possesses a very great number of sharp lines in the visible and in the ultraviolet region. In our first letter to Nature it was moreover pointed out that this spectrum is quite different from the spectrum, ascribed in 1911 by URBAIN[3] to an element, celtium, having chemical properties very similar to those of the rare earth cassiopeium (or lutecium) with atomic number 71, and which was as-

[1] H. M. HANSEN and S. WERNER, Nature, March 10, 1923. In the meantime another preliminary list of some 20 strong lines in the region between 3500 and 4500 Å. U. has been presented on July 13 at the Gothenburg meeting of the Scandinavian naturalists (printed in Fysisk Tidsskrift 21, p. 185, 1923) and later a fuller record of our measurements between 2500 and 3500 Å. U. has also been published (Nature, October 27, 1923).

[2] D. COSTER and G. v. HEVESY, Nature, January 20, February 24 and April 7, 1923, and G. v. HEVESY, Ber. d. d. chem. Ges., LVI, p. 1503, 1923.

[3] G. URBAIN, Comptes Rendus, 152, p. 141, 1911.

sumed by Urbain and Dauvillier[1] to possess the atomic number 72. In a second letter to Nature[2] we have drawn attention to the fact that Urbain's celtium lines are identical with certain lines in the spectrum of cassiopeium.

For the production of all our spectra we have used hafnium salts (hafnium oxide or hafnium ammonium double-fluoride) kindly prepared for us by Professor Hevesy and his assistants. As it is not difficult to separate hafnium from all other elements (including the rare earths) with the exception of zirconium, most of the preparations we have used contained zirconium as the only impurity; however, in some of them small traces of other elements, titanium, niobium, manganese and calcium were present. As the hafnium spectrum is much more difficult to excite than the zirconium spectrum, it is important to use very concentrated hafnium preparations to get the hafnium spectrum well developed. We have used therefore for the final exposures only preparations containing not more than from 1 to 4 per cent zirconium, according to X-ray analysis made by the method described by Coster[3].

The arc spectra were produced in an ordinary direct current carbon arc. In our first experiments, when we had only small amounts of hafnium salts at our disposal, we placed the salts on the cathode and, during the exposure, added potassium bifluoride. In this way we got rather intense spectra without wasting too much hafnium salt. In the later experiments we used exclusively hafnium oxide

[1] G. Urbain, Comptes Rendus 174, p. 1349, 1922; A. Dauvillier, C. R. 174, p. 1347, 1922.

[2] H. M. Hansen and S. Werner, Nature, April 7, 1923. To this note we can add that already Exner & Haschek (1911) have found most of the celtium lines in the spectrum of element number 71.

[3] D. Coster, Z. f. Elektrochem. 29, p. 344, 1923. Chem. News, August 3, 1923.

which was placed in the anode. In order to get intense hafnium spectra currents as high as 25 Ampères were used. The electrodes were commercial carbon electrodes, purified by repeated boiling in hydrofluoric and hydrochloric acid. The spark spectra were produced with a 40 cm induction coil, using a selfinduction coil of about 0.0005 Henry and a battery of Leyden-jars of a capacity of about 25000 cm. The spark electrodes were made of carbon, purified in the same way as the arc electrodes; before and during the exposure they were impregnated with a saturated solution of hafnium fluoride. Under these conditions the time of exposure with the grating for intense arc spectra was about 2 minutes, and for the red region 4 minutes; for spark spectra we had to expose from 1 to $1^1/_2$ hour. With the quartz spectrograph below 3500 Å. U. the arc was exposed about 15 seconds and the spark 3 minutes. A spectrum of pure zirconium which for the sake of comparison was always photographed on the same plate as the hafnium spectrum was produced in exactly the same way as the hafnium spectrum. It has been of great assistance to us, that Hevesy soon after the discovery of hafnium was able to supply us for this purpose with preparations of very pure zirconium, prepared from commercial zirconium by removing its hafnium content.

The spectral region from 2250 to 3500 Å. U. was photographed with a Hilger quartz spectrograph of largest size (Model E 1); the region from 2500 to 3500 Å. U. could be taken in a single setting of the spectrograph with a very fine definition over the whole plate; in the region below 2500 Å. U. the definition was also very good. For the remaining part of the spectrum from 3500 to about 7200 Å. U. a small Rowland concave grating of 1,25 m radius of cur-

vature was used in a mounting, which permitted the photographing of the whole spectrum in the first order and up to 6450 Å. U. in the second order in a single exposure. Here Kodak Portrait Films (Par Speed) and Panchromatic Films were used, the errors which could arise from irregular curvature of the film being eliminated in the way described below.

For the final measurements all our hafnium lines are measured against zirconium lines as standards. As we do not claim a greater accuracy than about 0,05 Å. U. in this preliminary investigation, we think it justified to use this method, which for our work has proved very suitable. As well known, the position of a line especially in a grating spectrograph can shift slightly with varying illumination, when only a part of the grating is illuminated, especially if the grating is not a very perfect one and not very perfectly adjusted. Also in a quartz spectrograph such shifts can occur due to aberrations in the lens. When working with an arc, changes in the illumination during an exposure are unavoidable, which may cause shifts between the spectrum to be measured and the comparison spectrum. In our method errors due to such shifts are excluded, since we use the zirconium lines in the hafnium spectrum itself as reference lines, so that any change in the illumination will affect all lines in the same way. The zirconium spectrum is, even if only 1 per cent zirconium is present, strong enough to give numerous well defined reference lines, and the zirconium spectrum is very well known, since Bachem[1], in the institute of Kayser, has measured it against iron normals with great accuracy. In fact he claims an accuracy of 0,01 Å. U. through the whole spectrum with the excep-

[1] A. Bachem: Das Bogenspektrum des Zirkons. Dissertation Bonn 1910.

tion of the region of longest wave lengths, where perhaps errors up to 0,03 Å. U. are possible; all his wave lengths are given to 0,001 Å. U. in international Å. U.

The comparison spectrum of pure zirconium which, as mentioned, was always photographed besides the hafnium spectrum was never used for measuring purposes, but only to identify the zirconium lines and also the lines due to impurities in the carbon electrodes. Great care has of course been taken to exclude lines due to impurities in the hafnium preparation itself. Every line has been compared with the "codex" in KAYSERS: *Handbuch der Spektroskopie*, and with the two "codices" in EXNER and HASCHEK: *Die Spektren der Elemente bei normalem Druck*, and in every case, where a coincidence was possible, the whole spectrum of the element in question has been examined. If then none of the strongest lines of this element, especially none of the most persistent lines ("raies ultimes" of GRAMONT) were present, the coincidence has been taken as accidental, and the line given as a hafnium line[1]. In a few cases we have, in our table below, added to a line the symbol of an element, as for instance (Mn). This means that the line in question is exactly or nearly coincident with a line belonging to the spectrum of this element, traces of which we have mentioned as present in some of the preparations used, but that the line is so much stronger relatively to the other observed lines of that element that we think it most probable that the line really belongs to the hafnium spectrum[2].

[1] In this part of the investigation the material of GRAMONT a. o. collected in the new book of F. TWYMAN: Wavelength Tables for Spectrum Analysis, Hilger 1923, has proved very useful.

[2] We do not think it necessary to go into detail in regard to the remarks to our letter in Nature of March 10, put forward by B. BRAUNER

All our spectra are measured with a measuring microscope from Hilger, using only the part of the sledge which had been found sufficiently perfect. For calculating the wave length from the measured position we have used for the spectrograph the dispersion formula of Hartmann with 3 constants, and for the grating a formula of second degree, i. e. also with 3 constants. The remaining corrections were found in a graphical way, but for the grating they could amount only to a few tenths of an Å. U. except near some of the edges of the films. As every line always has been measured on several exposures, and the edges of the films never had the same positions in two exposures, errors arising from the distortion near the edges are avoided. In this way, due to the large number of well known reference lines, which allowed the drawing of the curve for the remaining small corrections with great certainty, all errors from local curvatures of the film, or similar causes were eliminated.

In our preliminary note of March 10, we published 52 hafnium lines in the region between 2500 and 3500 Å. U. giving only the strongest of the lines, we had measured at that time (of intensity $2^1/_2$ or more). All these lines (with one exception) are now confirmed, but the wave lengths of some of them must be slightly altered due to the greater material and more accurate measurements now available. In our letter to Nature we mentioned, that several of the

in "Chemistry and Industry Review", Sept. 14, 1923. He apparently believes that we have been ignorant as to the well known work of Exner and Haschek, and furthermore he ascribes a low accuracy to the measurements of Bachem, which Kayser in his "Handbuch" has given as by far the best zirconium measurements. He also has incorrect ideas as to the accuracy which can be reached with a "one prism spectrograph" and so in ascribing to our measurements a far too low accuracy, he can, of course, find casual coincidences between our hafnium lines and spectral lines of a number of other elements, etc.

strongest hafnium lines are present as weak lines in zirconium spectra measured by earlier investigators. This was to be expected, because all zirconium minerals and consequently all commercial zirconium preparations contain from one half to five per cent of hafnium. In fact, for the region of the zirconium spectrum where EXNER & HASCHEK's measurements are exhaustive we find almost all our stronger hafnium lines and also some of the weaker lines among their zirconium lines, especially among their spark lines, whereas BACHEM (l. c.) gives fewer of our lines; these latter are denoted in the table below with an asterisk. Until further investigations appear, these lines may be taken as the most persistent lines ("raies ultimes") of hafnium. Besides the marked lines, BACHEM in several places without giving any measurements mentions the presence of weak lines which probably are identical with others of our stronger hafnium lines.

A short time ago BARDET[1] has published a list of 82 lines belonging to the arc spectrum of hafnium in the region between 2300 and 3500 Å. U. He does not give any details concerning his method of producing the spectrum, or the concentration of his preparations. Nor does he state, and it cannot be inferred by comparing his and our wave lengths whether his lines are given in the international or in the Rowland scale. It is therefore sometimes difficult to decide whether a line in his table coincides with one of our lines or not. Some of his lines are given to 0,01 Å. U., others apparently only to 0,05 Å. U., but if we allow errors in his values up to several times 0,05 Å. U., it seems that nearly all his lines are present in our spectra. Yet of his two strongest lines, the only two which are denoted as

[1] J. BARDET, Comptes rendus, 176, p. 1711, 1923.

"forte", we do not find the one, 2335,35 Å. U., in our plates, and this line can accordingly not be taken as a hafnium line. On the other hand he does not find all our stronger lines, not even all the strongest lines in our first table, and the relative intensities of his lines are rather different from ours. But as all his lines with the exception of 6 are stated as "moyenne", "faible", "extrêmement faible", "à peine visible", we think that his preparation has not been very concentrated, and it is not yet possible to conclude with certainty that the relative intensity of a line in the hafnium spectrum differs much according to the conditions of excitation, such as is the case with the zirconium spectrum[1]. Apparently no other investigations of the hafnium spectrum have as yet been published.

In the following table of the hafnium lines the wave lengths are given in international Å. U. in air. For each line its estimated intensity I is added, both in the arc and in the spark spectrum, using a scale of intensity from $^1/_2$ to 6, 6 denoting very strong intensity, 5 strong, 4 rather strong, 3 not strong, 2 faint, 1 weak, $^1/_2$ extremely weak, d diffuse. The difference between the arc and the spark spectrum is not very marked. Above 5100 Å. U. only the strongest lines in the spark spectrum have been observed, and the spark intensities given for these lines have only relative values and can be compared neither with the corresponding arc intensities nor with the spark intensities of shorter wave lengths. Above 6100 Å. U. only the arc spectrum could be observed. It must of course be borne in mind that due to the different sensibility of the photographic plates and films in different parts of the spectrum all statements of intensity have only a very limited value, and in-

[1] F. Exner & E. Haschek, l. c., I. p. 4.

tensities for lines lying a greater distance apart cannot be compared at all.

With the exception of the few lines of wave length greater than 6400 Å. U. which are only measured in first order spectra and therefore given to 0,1 Å. U. all lines in the table are given to 0,01 Å. U., but, as mentioned above, errors of about 0,05 Å. U. are possible. For the longest wave lengths in the region taken with the quartz spectrograph, viz. from 3000 to 3500 Å. U. the error may be still a little larger. This also is the case in the regions, where the cyanogene bands are very strong, and where we only were able to give the strongest lines.

As to the weakest lines, we have not measured the lines which both in the arc and the spark spectrum showed an intensity smaller than 1. Of the weakest measured lines of intensity 1 we have preferred to give all lines which seemed to belong to the hafnium spectrum, even if some of them may prove somewhat doubtful, since weak lines may be of interest for the purpose of finding series relations.

B. H. in the table denotes a head of a hafnium band, falling off towards longer wave lengths.

λ	I		λ	I		λ	I	
	arc	spark		arc	spark		arc	spark
7240,8	5		6906,4	1		6713,5	4	
37,1	5		6858,7	3		6691,0	2	
7131,8	6		50,0	1		59,5	2d	
19,5	2		36,5	1		56,7	2d	
7063,7	5		26,6	3		47,0	4	
30,3	2		19,0	6		44,7	6	
6980,9	4		03,0	1		31,5	1d	
79,6	2		6789,4	6		28,1	1d	
37,2	1		54,6	5		24,4	2	
35,2	1		47,6	3		6587,2	4	
11,4	3		34,8	2		84,6	1	

λ	I arc	I spark		λ	I arc	I spark		λ	I arc	I spark	
6567,5	2			5902,91	6	3		5590,73	2	1	
58,0	3			5890,48	4			75,85	4½	2	
56,6	2			86,28	1			52,10	6	4	
41,2	1			83,66	3	1		50,58	6	4	
6486,5	2			47,74	2			41,93	1		
78,7	1			45,86	3			38,07	4d	1	
71,5	1			42,22	4½	1		30,28	2		
57,0	2			38,87	2			24,90	1		
49,9	2			17,43	2	1		24,37	4	3	
31,8	2			11,24	1			10,40	3	2	
09,56	2			09,50	3			10,10	3		
*6386,36	5			08,37	1			03,16	1		
38,16	3			07,17	1			5497,24	3	1	
18,38	1			5799,70	1			63,31	6	3	
11,78	2			96,26	1			52,88	5½	2	
6248,92	4			88,11	1			44,03	4	2	
* 38,51	3			67,16	3	2		38,76	4½	2	
16,80	3			65,96	2			35,77	2		
11,94	1			65,31	2d	2d		23,98	3	1	(Fe)
10,74	3			48,71	3	2		04,46	4	1	
09,47	2			42,62	1d	1		5398,70	1d		
02,80	1			34,59	3	1		91,32	2d	1	
6192,48	1			20,12	3		B. H.	89,39	4½	1	
85,15	5			19,20	6	4		83,06	2		
35,15	1			13,26	4	2		73,88	6	3	
18,20	2	1		5698,08	4	2	B. H.	71,02	1d		
6098,67	4½	2		73,58	1	1		68,55	1		
54,09	2d	1		62,95	1			61,41	1		
43,22	3d	1		62,06	2		(Ti)	58,34	2		
16,78	3	2	(Mn)	54,54	3	1		54,74	6	2	
5992,98	2	1		50,72	3	1		48,44	3	1	
86,48	1d	1d		44,50	1			46,30	3	2	?
78,66	4	2	(Ti)	28,18	2			24,28	4	2	(Fe)
74,30	4½	3		13,96	3			11,54	6	4	
33,72	4	3		13,28	5½	3		09,66	4	1	(Zr)[1]
26,50	2			00,79	2			07,82	3		(Zr)

[1] The symbol (Zr) means that we have observed the corresponding line also in our comparison zirconium spectrum, but so weak that the line also must belong to the hafnium spectrum, whereas the lines denoted by an asterisk and which (compare p. 9) have been measured by Bachem as weak zirconium lines never could be detected in our comparison spectrum of hafniumfree zirconium.

λ	I arc	I spark		λ	I arc	I spark		λ	I arc	I spark
304,17	2			5058,09	3	2		4858,43	3	4
299,85	2d			51,31	2	1		50,62	3	3
98,04	6	3		47,43	5	4		48,48	2	3
92,76	2d			45,28	1	1		43,98	3	3
90,78	1			40,79	6	6		37,24	5	5
89,93	1			37,32	2	1d		34,18	4½	3
86,09	3			25,80	2	2		18,86	4	4
84,62	1			21,09	3	2		17,20	3	4½
75,05	4	1		18,14	6	4½		13,86	1	2
64,92	4½	3		00,56	2	2		11,14	2	3
60,41	4	2		4999,59	5	4	(Ti)	09,24	2	2
58,75	2			92,26	3	2		07,14	2	3
54,38	2d			84,66	2	2		00,51	6	6
47,07	4	2		76,92	2	2		4795,98	2	2
44,60	3			75,20	6	5		90,72	3	4½
43,97	5½	2		69,26	2	1		82,77	4	5
08,85	3			65,30	2	2		77,16	1	2d
194,56	2			47,34	2	1		74,90	3	3
87,75	4	2		45,32	4	3		73,73	4	4
81,92	6	3		34,34	4½	4½		66,51	4	4½
76,16	1			33,88	[1]			65,80	2	3
70,22	4½	2		20,88	2	2		60,53	2	3
53,15	3	1		15,24	4	3		57,60	3	3
31,56	1d			10,05	2	2		38,61	3	3
28,50	4	2d		07,20	2d	1		35,62	3	3d
14,36	1			06,29	1d	1d		21,74	3	3
11,28	1			04,44	3	4		08,85	3	3
06,55	2			03,02	2d	3		4699,70	3	4
01,64	2			4896,36	3	3		99,02	4	4½
00,68	2			89,78	2d	1d		70,93	—	2
098,20	1		B. H.?	78,14	3	3	(Ca)	69,24	2	2
93,84	4	2	B. H.	77,59	4½	5		64,13	5½	5½
90,86	2			72,95	3	3		59,21	—	2
79,57	3	3d	B. H.?	65,44	2	3		55,18	6	5
75,90	2	2		63,29	4	5		52,08	2d	3d
74,71	3	3	B. H.	61,52	2	1		50,61	2	3d
71,18	2	1		60,58	1	1		48,34	—	2d
63,12	1	—		59,24	4½	5½		42,24	4	3

[1] This line has been observed with very varying intensity (from 1 to 4) in different exposures, but cannot be identified as due to an impurity.

λ	I arc	I spark		λ	I arc	I spark		λ	I arc	I spark	
4622,70	4½	5		4408,85	3	3		★4093,16	6	6	
20,85	6	5		4385,46	1	2		83,33	4	4	
19,46	2	2		79,18	2	2d		80,44	5	5	
13,71	3d	3	?	67,91	4	5		67,81	2	3	
08,10	4	4		65,37	3	3		66,20	4	4	
05,76	3	4		56,32	5	6		64,78	2	2	
4598,86	6	6		53,37	3	3d		62,85	4½	5	
97,94	3	3		52,59	3	3		57,45	3	2	
86,24	—	3		50,52	4	6		50,90	3	3	
73,78	4	4		49,77	3	3		50,62	3	3d	
70,62	2	3		36,69	5	6		49,75	1	1	
65,93	5	5		35,13	2	3		49,44	3	3	
62,70	3	3d		34,63	3	4½		47,97	3	4	
47,76	—	2		30,30	4½	4½		44,38	3	3	
46,96	2	2d		22,65	1	2		33,87	1	2d	
44,00	3	4		20,65	4½	5		32,28	4	4	
43,00	2	2		18,15	4	4		29,18	3	3	
41,73	1	1		03,59	3	3		20,26	3	3	
41,28	1	3		4296,40	3	3		11,48	2	2d	
40,88	4	4		72,82	4½	5		08,44	2	3	
35,32	2	3		69,66	4	4		07,34	2	3	
33,15	5	5	(Ti)	63,40	4	4		03,76	2	2	
24,66	—	3		62,70	3	3		3996,77	2	3	
20,59	2	3		61,00	3	4		84,02	3	4	
18,30	3	3		52,00	4	4	B. H.	79,34	3	4	
4499,64	2	3		49,30	4½	4½		70,08	4	3	B. H
90,60	2	3		45,82	3	4		68,02	2	2	
86,14	4½	4½		32,36	4½	6		64,94	3	4	
73,04	1	—		28,00	3	3		51,80	5	5	
66,38	3	3		09,68	3	3		50,76	3	4	
52,95	3	3		06,53	4½	5½		49,47	1	2	
38,02	4	4	(Zr)	4177,47	3	4		45,31	2	2	
32,94	1	2d		74,32	4½	5		41,17	1	1	
30,56	1	1		62,34	4	4		39,00	3	3	
22,70	4	5		58,87	3	4		38,40	1d	2	
22,24	2	2		45,75	3	4		35,67	3	3	
17,85	3	4		36,36	2d	3d		31,78	2	2	
17,34	4½	6	(Ti)	27,75	4½	5		31,33	3	4	
16,14	2	2		13,53	4	4½		27,57	2	4	
15,05	—	2		04,24	2	3		26,40	3	3	

λ	I arc	I spark		λ	I arc	I spark		λ	I arc	I spark	
3923,90	5	5		3698,32	2	2		3597,42	4½	5	
18,06	6	6		96,48	4	4		69,03	5½	6	
17,42	4	4		82,22	6	6		67,36	3	4	
12,50	1d	1		81,35	3	3		64,28	3d	3d	
09,18	3	3d		75,73	5	5		61,64	6	6	
06,87	3	3		72,25	4	4		52,66	5	6	
02,90	4d	4	(Fe)	66,72	2	3		48,79	3	3	
3899,92	4	5		65,28	4½	5		36,58	4	4	
95,62	2	1		64,54	2	3		35,50	5	5	
92,45	2	3		61,67	1	1		34,48	3	2	
89,31	3	4		61,02	4	4½		31,20	2	2	
80,78	3	3	(Cyanogene band)	58,98	2	3		22,98	5	5	
17,04	2	3		54,20	3d	2d	B. H.?	21,56	2	2	
00,39	4	4		51,78	4	4		18,72	3	3	
3793,34	5	5		50,47	3	3		13,26	3	3	
85,39	5	5	?	49,06	4½	4½		11,74	½	1d	
77,73	5	5		48,31	3	3		06,82	3	3	
47,50	3	3		45,78	1	1	★	05,20	6	6	
46,80	4	4		44,29	6	6		03,57	3	3	
44,97	3	3		37,58	3	3		3497,42	5	5	
39,04	2	3		33,14	–	3		95,75	5	5	(Ti)
37,83	3	4		32,67	2	2		87,55	½d	3	
33,80	4	4		30,83	4	4		79,20	6	6	
26,48	3	3		27,79	3	2		72,38	5	5	
19,28	6	6		22,42	2	3		67,59	3	2	
17,80	5	5		19,98	3	3		62,66	4	4	
08,85	2	2		17,68	3	3		41,85	3	2	
05,38	4	4½		16,86	5½	6		28,38	5	5[1]	
01,12	5	6		3599,87	4½	4	(Zr)	★ 19,18	5	4	
3699,69	5	5		99,12	2	3		17,35	5	3	

[1] The line 3438,25 given in our letter to Nature (October 27) has now been omitted. s this line is one of the strongest and ultimate zirconium lines the symbol (Zr) ught to have been added in the table in Nature, but was erroneously omitted in ıe final manuscript. The line was at that time considered also as a hafnium line, nce this particular line in some exposures was somewhat stronger in the hafnium ectrum than in the zirconium comparison spectrum, whereas all other zirconium nes were much weaker in the hafnium spectrum. Yet we think, having now a larger aterial available, that this difference in behaviour is only accidental, and we think best to omit this line.

λ	I arc	I spark		λ	I arc	I spark		λ	I arc	I spark	
3413,77	5	3		3220,60	4	5		3080,75	6	6	
12,34	3	1		17,16	5	5		76,86	2	3d	
10,16	5	6	(Zr)	06,69	—	2		74,79	4	4	
07,77	4	4		06,17	5	4		74,09	3	3	
* 02,44	4	3	(Ti)	03,72	3	4		72,92	6	5	(Ti)
*3399,80	6	6		02,15	1	2		69,16	3	3	
97,50	4d	3d		00,01	4	5	(Ti)	67,37	6	5	
95,00	3	4		3195,62	2	2		57,02	5	5	
89,78	5	5		94,20	6	6		55,45	4	3	
86,10	4	4		93,50	5	5		54,48	4	3	
84,67	5	4		89,69	4	4		50,74	5	4	
84,17	1d	3d		81,02	4	4		46,03	4	4	
78,88	4	3		79,48	1	2d		34,54	2	1	
66,71	4	2		76,86	6	6		31,14	5	6	
60,07	4	3		74,92	1	1		25,32	—	4	
58,90	5	3		72,93	5	6		24,71	—	4	
52,01	6	6	(Ti)	62,58	5	6	(Ti)	22,04	—	2	
32,72	6	6		59,81	5	5		18,28	5	5	
28,16	5d	5		56,63	5	5		16,75	6	5	
24,16	1/2	2		51,64	4	3		12,87	6	6	
17,95	5	6	(Ti)	48,45	4	4		11,21	2	3	
17,19	1/2	1		45,32	5	6		01,83	1	2	
12,84	6	6		40,77	3	4		00,10	5	5	
10,90	1	3d		39,68	3	4		2991,99	—	1	
10,23	5	4		37,54	3	3		90,81	—	3	
09,24	4	3d		34,76	6	6		84,06	—	3	
3298,94	3	2		31,81	—	5		82,72	5	4	
94,57	—	1		* 28,74	3	3		* 80,82	5	5	
91,03	4	3		26,30	2d	3		79,24	5	4	
89,71	1	1		23,89	1	1		77,59	4	4	
83,40	5	3		19,96	4	4		75,89	5	6	
80,00	5	5		16,97	3	4		75,36	1	1	
67,12	5	3		14,85	—	1		74,09	2	3	(Nb)
62,53	3	3		09,12	6	6		73,40	—	3d	
55,28	5	6		02,45	—	1		68,85	6	5	
53,68	6	6		01,40	6	6		67,24	3d	4	(Ti)
49,50	4	3		00,75	—	1		* 64,84	5	5	
43,38	4	2		3096,75	5	4		61,80	4	4	
30,09	3	2		92,23	4	4		58,02	4	4	
26,96	2	3		91,73	1	2		54,22	5	5	

λ	I arc	I spark		λ	I arc	I spark		λ	I arc	I spark	
2950,70	5	5		2850,11	3	3		2718,54	5	5	
47,14	3	4		49,18	5	5		13,84	4	3	
44,71	4	4		45,79	5	5		13,46	½	1	
40,78	5	5		34,14	4	3		06,68	6	5	
40,23	1	2		33,30	5	4	?	05,60	6	5	
29,91	4	4		29,32	3	4		03,13	1	2	
29,62	6	5		22,69	6	6		2697,05	2	2	(Nb)
26,42	1	3		★ 20,22	6	6	(Ti)	88,33	2	1	
24,62	3	3	(Zr)	19,75	4	3		85,17	3	4	
19,57	6	6		18,94	4d	3d		83,37	5	6	
18,61	5	4		17,70	5	3		78,34	1	2	
16,51	6	5		16,09	1	2		77,55	2	3	
13,15	½	1		14,79	3	3		76,56	2	3	
12,75	1	1		14,46	4	4		71,18	3	4	
09,87	5	5	(Ti)	13,86	4	4		68,98	5	4	
04,80	5	5		12,31	2	2		68,26	4	3	
04,40	5	5		09,59	1	1		65,94	5	5	
2898,75	5	4		08,00	5	5		61,85	5	5	
98,27	6	5		2786,31	3	4		57,82	5	5	
94,84	1	1		84,48	½	1		57,47	4	4	
94,00	—	1		79,36	5	5		52,75	3	2	
92,55	4	3		75,25	4	3		52,31	1	2	
89,62	5	5	(Mn)	★ 74,04	5	4		49,09	3	4	
87,53	4	3	(Ti)	★ 73,39	6	6		★ 47,27	6	6	
87,13	4	4		72,98	3	3		42,70	5	3	
85,49	3	4		72,33	3	4		★ 41,39	6	6	
79,11	4	4		70,44	4	4		★ 38,68	6	6	
76,34	5	5		66,95	4	3		36,96	4	3	
73,63	3	2		64,53	½	1		35,77	3	4	
67,77	1	2		62,69	4	3		26,92	3	4	
66,36	6	6		61,65	5	4		22,72	6	6	
63,37	3	2		56,92	3	4		20,91	1	2	
61,70	6	6		51,84	5	5		16,60	4	3	
61,04	5	6	(Nb)	43,61	4	3		14,27	1d	2	
60,57	3	3		★ 38,74	5	6		13,59	4	5	
60,32	1d	3		★ 37,81	3	2		12,56	3	2	
58,69	1	2	(Mn)	35,06	—	1		09,97	3	2	
57,65	4	4		31,10	1d	2		08,42	3	3	
51,22	5	4	(Ti)	29,08	4	3		07,27	2d	2	
50,92	4	3		27,42	3	2		★ 07,02	5	5	

λ	I arc	I spark		λ	I arc	I spark		λ	I arc	I spark	
2606,38	5	5		2510,41	—	2		2400,77	4	4	?
02,86	3	3		02,65	4	3		*2393,78	4	5	
02,66	3	3		00,73	3	4		93,33	4	5	
2599,14	1	2		2497,01	5	5		93,16	2	3	
95,57	1d	2		95,12	1	3		83,53	1	1	
91,29	5	5		94,35	—	2		81,00	2	3	
82,48	5	5		* 81,38	2	3		80,30	4	5	
78,15	5	5		73,87	4	5		77,58	—	1	
76,81	5	5		69,15	$4^1/_2$	6		65,97	2	2	
74,89	1	2		65,01	3	3		51,19	5	6	
73,90	5	5		64,18	5	$5^1/_2$		47,42	5	5	
72,93	1	2		63,86	—	3		43,29	4	4	
71,68	5	6		60,45	6	6		37,30	3	4	
70,69	2	3		59,41	—	2		36,41	—	2	
63,61	4	5	(Mn)	55,16	1	2		32,92	2	3	
59,23	4	5		53,97	1	2		24,85	3	4	
51,37	5	6		53,31	3	$4^1/_2$		23,22	3	4	
49,11	–	2		52,26	2	3		* 22,43	4	5	
48,97	—	1		49,40	4	$4^1/_2$		21,12	3	$4^1/_2$	
48,51	1	2		47,22	5	6		18,45	—	1	
48,17	4	4		41,02	1	2		13,42	—	1	
37,31	5	5		34,73	1	3		2298,32	—	2	
32,94	4	4		33,50	3	5		91,62	1	2	
32,11	—	1		28,94	3	5		84,54	1	2	
31,16	5	5		25,93	4	$4^1/_2$		* 77,12	3	5	
21,47	3	4	(Nb)	17,64	5	6		73,10	2	3	
17,85	1	2		10,10	5	6		66,78	2	4	
* 16,86	6	6		06,40	3	4		66,49	1	3	
15,48	4	4		* 05,40	$4^1/_2$	$5^1/_2$		55,08	1	3	
13,00	6	5		04,54	2	3		53,95	2	4	
12,69	6	5		03,58	1	2					

Our thanks for assistance in the calculations are due to several of our colleagues in this institute, especially Mr. V. Th. Jantzen and to Mr. B. Strömgren.

Universitetets Institut for teoretisk Fysik.
Copenhagen, November 27, 1923.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **V**, 9.

ÜBER DAS POTENTIAL ZWISCHEN DER 0.1 n UND 3.5 n KALOMELELEKTRODE

VON

J. K. GJALDBÆK

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1924

Die bisher veröffentlichten Messungen des Potentials zwischen der 0.1 n und 3.5 n Kalomelelektrode weisen keine hinreichende Übereinstimmung auf.[1] Um über die tatsächliche Grösse und womöglich über die Ursache der früheren Nichtübereinstimmung Klarheit zu gewinnen, wurde in dem chemischen Laboratorium der Königl. tierärztlichen und landwirtschaftlichen Hochschule zu Kopenhagen eine Untersuchung angestellt, deren Ergebnis hier mitgeteilt werden soll,

Benutzte Präparate: Für die Untersuchungen wurden reines Quecksilber und reines Kaliumchlorid eigener Herstellung benutzt; von Kalomel teils Präparate eigener Herstellung, teils einige käufliche Präparate.

Das Quecksilber wurde erst in Lothar Meyers Apparat gereinigt, indem es etwa 20mal durch eine saure Merkuronitratlösung gegossen wurde; darauf wurde es destilliert und durch Destillation im Vakuum rektifiziert, während man eine geringe Menge Kohlendioxyd durchströmen liess.

Das Kaliumchlorid: Es war von Anfang an die Absicht, Kahlbaums reines Kaliumchlorid zu benutzen, da

[1] Niels Bjerrum og J. K. Gjaldbæk, Undersøgelser over de Faktorer, som bestemmer Jordbundens Reaktion. II. (Den kgl. Veterinær- og Landbohøjskoles Aarsskrift 1919, S. 73). — Einar Biilmann, Om Kinhydroners Brintning (Festskrift udgivet af Kobenhavns Universitet, Novbr. 1920, S. 80). — J. K. Gjaldbæk, Undersøgelser over de Faktorer, som bestemmer Jordbundens Reaktion. III. (Den kgl. Veterinær- og Landbohøjskoles Aarsskrift 1921, S. 262).

diese Ware sicherlich in den allermeisten Fällen hierzulande zur Herstellung von Kalomelelektroden benutzt wird und es als wahrscheinlich betrachtet wurde, dass die Ursache der Nichtübereinstimmung der Resultate an dem angewandten Kalomel liegen müsse. Die gelieferten Kahlbaumschen Präparate waren aber nicht befriedigend. In einem Falle war das Salz in ein schmutziges Glas getan, das den Eindruck machte, früher Ferrichlorid enthalten zu haben; in einem anderen Falle war das Glas anscheinend rein, das Salz enthielt aber einzelne Klumpen von gelblicher Farbe. Die Präparate wurden daher zurückgesandt, und es wurden 5 kg Kaliumchlorid A. R. (Analytical Reagents) von The British Drug Houses angeschafft. Die Signatur war mit folgender Garantie versehen: Guaranted to conform to the standards of purity regarded as necessary for analytical work by the special committee appointed by the councils of the Institute of Chemistry of Great Britain and Ireland and The Society of Public Analysts and other Analytical chemists. Das Präparat sah gut aus; es zeigte sich aber, dass es Ferrisalz und Ultramarin enthielt. Es wurde in folgender Weise gereinigt: eine siedende gesättigte Lösung des Salzes wurde in ein ebenso grosses Volum reine 38 proz. Salzsäure filtriert, nach der Abkühlung wurden die ausgeschiedenen Kristalle abzentrifugiert und 5mal umkristallisiert. Nach der 4. Umkristallisation war im Salz keine freie Salzsäure nachzuweisen. Das 5mal umkristallisierte Salz wurde sodann in kleinen Portionen jede für sich in einem Platintiegel mit Deckel geschmolzen und in geschmolzenem Zustande zum Abkühlen in eine Platinschale gegossen. Zum Schmelzen wurde eine Gasgebläselampe mit Sauerstoff benutzt. Obwohl Platintiegel und Platinschale vor dem Gebrauch sorgfältig gereinigt waren, waren die zuerst hergestellten Portionen

von geschmolzenem Kaliumchlorid nicht farblos, sondern hatten eine ähnliche bräunliche Färbung wie das geschmolzene Natriumchlorid des Handels. Die Präparate wurden aber nach jedem neuen Schmelzen immer reiner, und nach etwa 10maligem Schmelzen waren die Platinapparate rein. Die bei den letzten Schmelzen gewonnenen Präparate waren ganz farblos. Diese letzten farblosen Präparate wurden für die Untersuchungen benutzt, indem die theoretische Menge des Salzes unter Anwendung von geeichten Messkolben in destilliertem Wasser gelöst wurde, das durch 2tägige Lüftung mit kohlendioxydfreier Aussenluft gereinigt worden war. Das spezifische Leitungsvermögen des destillierten Wassers betrug 10^{-6}.

Das Kalomel: Präp. Nr. 1 wurde nach der Pharmacopée française[1] hergestellt, indem eine salpetersaure Lösung von Merkuronitrat unter Umrühren in einen Überschuss verdünnter Salzsäure gegossen wurde. Dieses Verfahren wurde der Fällung mit Alkalichlorid vorgezogen, da nach A. Christensen[2] das Kalomel durch basisches Merkuronitrat verunreinigt werden kann, wenn man Alkalichlorid benutzt und dies in Unterschuss vorhanden ist. Das gefällte Kalomel wurde durch Abzentrifugieren und Aufschlämmen in destilliertem Wasser ausgewaschen, bis das Waschwasser keine Reaktion mit Silbernitrat ergab, worauf das Präparat im Vakuumexsikkator über Schwefelsäure getrocknet wurde.

Die Präpp. Nr. 2 und Nr. 3, die einem Kalomelpräparat entsprechen, das in der Pharmacopoea Austriaca offizinell ist, wurden durch Reduktion mit Schwefeldioxyd aus Merkurichlorid hergestellt. 100 g Merkurichlorid wurden

[1] Vgl. Hagers Handbuch der pharmaceutischen Praxis. Bd. II. S. 41.

[2] A. Christensen, Kommentar til Pharmacopoea Danica 1893. S. 236.

in 1 Liter destilliertem Wasser gelöst, und nach Erwärmung bis auf 50° wurde die Lösung mit Schwefeldioxyd gesättigt; nach 2—3stündigem Stehen bei 50° wurde der entstandene Niederschlag abzentrifugiert und ausgewaschen, bis das Waschwasser weder mit Ammoniumsulfid noch mit Silbernitrat Reaktion ergab, worauf das Präparat im Vakuumexsikkator über Kalciumchlorid getrocknet wurde. Dies ist das Präp. Nr. 2. Der Ertrag ist nicht im Journal aufgeschrieben worden, war aber etwa 15 g. Das Filtrat von Präp. Nr. 2 wurde wiederum mit Schwefeldioxyd gesättigt und 3—4 Stunden bei 60° stehen gelassen, wodurch 20 g gefällt wurden. Das Filtrat von diesen 20 g wurde wieder mit Schwefeldioxyd gesättigt und 5—6 Stunden bei 70° stehen gelassen, wodurch 18 g gefällt wurden. Die bei 60° und 70° gefällten Produkte wurden ausgewaschen und in gewöhnlicher Weise getrocknet und bilden nach einer Vermischung das Präp. Nr. 3. Die Präpp. Nr. 2 und Nr. 3 haben sowohl makroskopisch als mikroskopisch ein ganz anderes Aussehen als Präp. Nr. 1. Bei der Herstellung entsteht erst ein Niederschlag von kleinen seideglänzenden Kristallen, die sich unter dem Mikroskop als kreuzförmig ergeben. Die Kristalle nehmen stark an Grösse zu, wenn die Mischung ruhig stehen bleibt, und in der Portion, in der die Reduktion bei 70° unternommen wurde, hatten sich ein paar Quadratzentimeter grosse Kristalle gebildet. Diese Kristalle sind ausserordentlich dünn und gehen beim Auswaschen in ganz kleine Stücke. Die Darstellung von Kalomel durch Reduktion von Merkurichlorid ist, wie aus dem vorhergehenden hervorgeht, ein langsam verlaufender Prozess, und es ist wohl anzunehmen, dass der Reduktionsprozess selbst langsam verläuft. Es ist indes vielleicht auch von einem langsam verlaufenden Kristallisations-

prozess die Rede. Auf diese Frage werden wir später zurückkommen.

Präp. Nr. 4 wurde durch Zusammenschütteln von 5 l Chlor, 1250 cm^3 destilliertem Wasser und 10 cm^3 reinem Quecksilber hergestellt. Die gebildete Paste von Quecksilber und Kalomel wurde ausgewaschen und in gewöhnlicher Weise getrocknet. Durch Absaugen auf Nutschfilter nach vollständigem Auswaschen wurde ein Teil des Quecksilbers, das in Überschuss vorhanden war, entfernt; das Präparat enthielt aber eine bedeutende Menge von freiem Quecksilber in sehr fein verteiltem Zustande.

Präp. Nr. 5 wurde durch Elektrolyse aus 1-normaler Salzsäure mit Quecksilber als Anode hergestellt, also der Herstellung von Merkurosulfat für Kadmiumnormalelemente analog. Auswaschen und Trocknen wie bei den vorigen Präparaten. Das Präparat enthielt etwas Quecksilber in fein verteiltem Zustande.

Präp. Nr. 6 war ein käufliches Präparat des in der Pharmacopoea Danica offizinellen Kalomels. Es wird durch Sublimation aus einer Mischung von Quecksilber und Merkurichlorid hergestellt und durch Pulverisieren und darauf folgendes Auswaschen von dem Merkurichlorid befreit.

Präp. Nr. 7 war ein käufliches Präparat des sogenannten Dampfkalomels. Es wird durch Zusammenleitung von Kalomeldampf und Wasserdampf in eine Vorlage hergestellt, wobei das Kalomel als feines Pulver gefällt wird, das durch Auswaschen gereinigt wird.

Präp. Nr. 8 war ein käufliches Präparat von gefälltem Kalomel (Chloretum hydrargyricum praecipitatum).

Die Präpp. Nr. 6, 7 und 8 sind allgemein benutzte pharmazeutische Präparate verschiedener Korngrösse (grob,

Tabelle I.

Potential in Millivolt von Hg | HgCl No. 1, 3.5 n KCl | 3,5 n KCl, HgCl (versch. Präpp.) | Hg

bei 18° bei t°

Zeit	Temperatur	Elektrode No. 2 Kalomel No. 2 (reduziert bei 50°)	Elektrode No. 3 Kalomel No. 5 (elektrolytisch)	Elektrode No. 4 Kalomel No. 4 (Hg + Cl)	Elektrode No. 5 Kalomel No. 1 (gefällt mit HCl)	Elektrode No. 6 Kalomel No. 6 (Pharm. Dan.)	Elektrode No. 7 Kalomel No. 7 (Dampfkalomel)	Elektrode No. 8 Kalomel No. 3 (reduziert bei 60° u. 70°)
$^{29}/_{11}$ 1921 Uhr 1^{00}	18°	0.24	0.04	0.24				
— 2^{10}	»	0.24	0.04	0.33				
$^{30}/_{11}$ —	»	0.14	0.05	0.31				
	Thermostat in Unordnung zw. $^{30}/_{11}$ u. $^{1}/_{12}$. Temp. einige Stunden bis auf 26°.							
$^{1}/_{12}$ —	18	0.88	0.09	0.31	0.11	— 0.18	— 0.10	0.06
$^{2}/_{12}$ —	»	0.78	0.09	0.31	0.03	— 0.05	— 0.06	0.10
$^{3}/_{12}$ —	»	0.60	0.09	0.32	0.03	— 0.03	— 0.08	0.05
$^{5}/_{12}$ —	»	0.51	0.10	0.34	0.03	0.01	— 0.07	0.05
$^{6}/_{12}$ —	»	0.45	0.11	0.35	0.04	0.02	— 0.08	0.06
$^{7}/_{12}$ —	»	0.43	0.13	0.36	0.04	0.02	— 0.08	0.06

			25° hinübergebracht.							
		—	12^{00}	25°	3.0	3.2	3.5	3.1	3.1	3.1	2.2
		—	12^{30}	»	3.07	3.22	3.45	3.15	3.03	3.04	2.90
		—	3^{00}	»	3.13	3.23	3.46	3.46	3.16	3.05	2.84
$^{8}/_{12}$	—	—	12^{30}	»	3.15	3.24	3 46	3.46	3.16	3.03	3.00
				Die Elektroden 2—8 werden in einen Thermostaten von 18° hinübergebracht.							
		—	1^{00}								
		—	1^{05}	18°	0.8	0.9	0.4	0.1	0.1	0.04	0.45
			1^{10}	»	0.70	0.19	0.37	0.07	0.04	— 0.03	0.32
		—	1^{15}	»	0.72	0.18	0.36	0.07	0.03	— 0.04	0.30
			2^{00}	»	1.02	0.15	0.36	0.06	0.05	— 0.08	0.36
			3^{06}	»	0.96	0.15	0.36	0.06	0.09	— 0.08	0.43
$^{13}/_{12}$	—			»	0.99	0.19	0.40	0.06	0.19	— 0.06	0.31
$^{15}/_{12}$	—			»	0.90	0.19	0.40	0.06	0.17	— 0.06	0.22
$^{19}/_{12}$	—			»	0.85	0.21	0.43	0.09	0.18	— 0.02	0.27
$^{21}/_{12}$	—			»	0.91	0.24	0.45	0.11	0.21	— 0.01	0.26
				Thermostat in Unordnung. Temp. bis auf 12° gesunken. Am $^{9}/_{1}$ 30°. Thermostat am $^{9}/_{1}$ in Ordnung gebracht.							
$^{11}/_{1}$	1922			18°	2.36	0.31	0.50	0.11	0.67	0.04	1.47
$^{8}/_{2}$	—			»	1.07	0.26	0.51	0.14	0.20	0.03	0.27
$^{31}/_{3}$	—			»	0.45	0.26	0.50	0.13	0.03	0.03	0.08
$^{18}/_{5}$	—			»	0.31	0.27	0.45	0.10	0.10	0.01	0.03

Tabelle II.

Potential in Millivolt von $\underbrace{\text{Hg} \mid \text{HgCl No. 1, 3.5 n KCl}}_{\text{bei } 18°} \mid$

$\underbrace{\text{0.1 n KCl, Hg Cl (versch. Präpp.)}}_{\text{bei t°}} \mid \text{Hg}$

Zeit	Temperatur	Elektrode No. 9 Kalomel No. 1 (gefällt mit HCl)	Elektrode No. 10 Kalomel No. 2 (reduziert bei 50°)	Elektrode No. 11 Kalomel No. 5 (elektrolytisch)	Elektrode No. 12 Kalomel No. 4 (Hg + Cl)	Elektrode No. 13 Kalomel No. 3 (reduziert bei 60° u. 70°)
$^{1}/_{12}$ 1921	19°	83.10				
$^{2}/_{12}$ —	»	83.10				
$^{3}/_{12}$ —	»	83.10	83.2	83.1	83.5	83.3
$^{5}/_{12}$ —	»	83.22	83.31	83.23	83.50	83.06
$^{6}/_{12}$ —	»	83.13	83.31	83.23	83.52	83.05
$^{7}/_{12}$ —	»	83.13	83.34	83.25	83.49	83.07
$^{8}/_{12}$ —	»	83.12	83.36	83.22	83.48	83.08
— — Uhr 2^{15}	Die Elektroden 9—13 werden in einen Thermostaten von 25° hinübergebracht.					
— — 2^{30}	25°	88.50	88.64	88.57	88.86	88.45
— — 2^{25}	»	88.50	88.65	88.56	88.85	88.41
— — 2^{30}	»	88.49	88.65	88.57	88.87	88.41
— — 3^{15}	»	88.48	88.64	88.56	88.85	88.38
$^{10}/_{12}$ —	»	88.50	88.64	88.55	88.88	88.41
— — — 2^{00}	Die Elektroden 9—13 werden in einen Thermostaten von 18° hinübergebracht.					
— — 2^{05}	18°	83.11	83.27	83.18	83.47	83.07
— — 2^{10}	»	83.10	83.30	83.17	83.47	83.07
— — 2^{15}	»	83.08	83.32	83.15	83.46	83.07
$^{13}/_{12}$ —	»	83.13	83.35	83.18	83.52	83.13
$^{15}/_{12}$ —	»	83.12	83.33	83.14	83.48	83.10
$^{19}/_{12}$ —	»	83.14	83.33	83.16	83.52	83.10
$^{21}/_{12}$ —	»	83.18	83.39	83.19	83.57	83.15
	Thermostat in Unordnung. Temp. bis auf 12° gesunken. $^{9}/_{1}$ Temp. 30°. Der Thermostat am $^{9}/_{1}$ in Ordnung gebracht.					
$^{11}/_{1}$ 1922	»	83.17	83.33	83.15	83.54	83.08
$^{8}/_{2}$ —	»	83.22	83.33	83.21	83.57	83.04
$^{31}/_{3}$ —	»	83.16	83.18	83.12	83.50	82.95
$^{18}/_{5}$ —	»	83.16	83.12	83.11	83.48	82.85

Tabelle III.

Potential in Millivolt von $\underbrace{\text{Hg} \mid \text{HgCl No. 1, 3.5 n KCl} \mid}_{\text{bei } 18^\circ}$

$\underbrace{\text{0.1 n KCl, HgCl (versch. Präpp.)}}_{\text{bei } t^\circ} \mid \text{Hg}$

Zeit	Temperatur	Elektrode No. 14 Kalomel No. 6 (Pharm. Dan.)	Elektrode No. 15 Kalomel No. 7 (Dampfkalomel)	Elektrode No. 16 Kalomel No. 8 (käufliches gefälltes Kalomel)
$^{9}/_{12}$ 1921	18°	83.14	82.95	83.07
$^{10}/_{12}$ —	»	83.15	83.00	83.17
— Uhr 2^{00}	Die Elektroden 14—16 werden in einen Thermostaten von 25° hinübergebracht.			
— 2^{02}	25°	88.2	88.2	88.5
— 2^{05}	»	88.48	88.37	88.58
— 2^{15}	»	88.52	88.38	88.57
$^{12}/_{12}$ —	»	88.56	88.35	88.52
— — — 2^{00}	Die Elektroden 14—16 werden in einen Thermostaten von 18° hinübergebracht.			
— 2^{05}	18°	83.27	83.02	83.16
— 2^{25}	»	83.24	83.00	83.14
$^{13}/_{12}$ —	»	83.30	83.02	83.18
$^{15}/_{12}$ —	»	83.21	82.99	83.14
$^{19}/_{12}$ —	»	83.22	82.99	83.14
$^{21}/_{12}$ —	»	83.26	83.04	83.18
	Thermostat in Unordnung. Temp. bis auf 12° gesunken. $^{9}/_{1}$ Temp. 30°. Der Thermostat am $^{9}/_{1}$ in Ordnung gebracht.			
$^{11}/_{1}$ 1922	18°	83.14	83.04	83.15
$^{8}/_{2}$ —	»	83.00	83.03	83.14
$^{31}/_{3}$ —	»	82.90	83.01	83.10
$^{18}/_{5}$ —	»	82.83	83.00	83.11

mittel, fein), und es wird ihnen eine verschiedene therapeutische Wirkung zugeschrieben, die durch die Zahlen 1, $1^1/_2$ und 2 charakterisiert wird. Wenn hierzulande ohne nähere Bezeichnung Kalomel verlangt wird, wird Präp. Nr. 6 verabreicht.

Elektrodengefäss. In unserem Laboratorium wird für Kalomelelektroden nicht das gewöhnlich benutzte »Ostwaldsche Elektrodengefäss«, sondern ein von Lewis, Brighton und Sebastian[1] eingeführtes Elektrodengefäss benutzt, siehe Fig. 1. Das Gefäss wird vor dem Gebrauch in einer Mischung von Kaliumchromat und Schwefelsäure gereinigt und nach gehörigem Ausspülen mit destilliertem Wasser im Trockenkasten getrocknet.

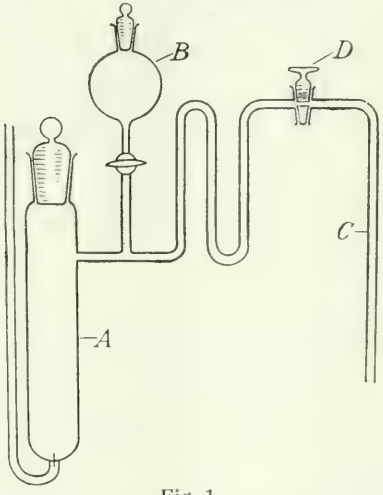

Fig. 1.

Die Herstellung der Elektroden geschah folgendermassen: In einer reinen, trocknen 60 cm³ Flasche mit Glasstöpsel wird eine Spatelvoll Kalomel mit etwa 2 cm³ Quecksilber zusammengeschüttelt; darauf werden 4—5 cm³ Kaliumchloridlösung zugesetzt, und es wird wiederum sehr kräftig geschüttelt, worauf das Glas bis $^4/_5$ mit Kaliumchloridlösung gefüllt wird und bei häufig wiederholtem Umschütteln 1—2 Stunden stehen bleibt. Nach dem Absitzenlassen wird zuunterst eine dunkelgraue Paste von Quecksilber und Kalomel und

[1] G. N. Lewis, Th. B. Brighton and R. L. Sebastian, A study of hydrogen and calomel electrodes (The journ. of the americ. chem. soc. Vol. XXXIX, 2245).

darüber eine Kalomelschicht beobachtet. Auf dem Boden des Elektrodengefässes wird nun eine etwa 1 cm hohe Schicht Quecksilber und darüber eine etwa 5 mm hohe Schicht Quecksilber-Kalomel-Paste angebracht, die in einer Glasröhre aus der Flasche aufgesogen wird; darauf wird die Flasche mit der Quecksilber-Kalomel-Aufschlämmung geschüttelt, und nach einem Augenblick Stehenlassens, wodurch die Quecksilber-Kalomel-Paste absitzt, wird mit einer Pipette so viel Kalomelaufschlämmung aufgesogen, wie für die Füllung von Gefäss *A* hinreicht. Schliesslich wird der Stöpsel aufgesetzt, indem man dafür sorgt, dass das Gefäss *A* keine Luftblase enthält, und das Heberrohr *C* wird mit Kaliumchloridlösung aus dem Behälter *B* ausgespült. Alle Schliffe sind mit einer geringen Menge von einem aus Kautschuk, Vaseline und Paraffin[1] zubereiteten Schmiermittel eingeschmiert. Es hat kein Auswaschen des Kalomels mit dem Kaliumchlorid stattgefunden, da ein solches Auswaschen als unnütz zu betrachten ist, wenn man trockenes und reines Kalomel anwendet. Der Hahn *D* war geschlossen, abgesehen von dem Augenblick, in dem die Messung stattfand, und die Heberröhren wurden ab und zu mit Kaliumchloridlösung aus dem Behälter *B* gespült.

Die Elektroden waren in Wasserthermostaten angebracht, die mit einer Genauigkeit von 0.1° reguliert wurden. Im Laufe der 5—6 Monate, über die die Versuche sich erstreckten, gerieten die Thermostaten ein paarmal in Unordnung, was in den meisten Fällen jedoch keine Rolle spielte, da das Potential sich nach einer Temperaturveränderung meist schnell einstellt; nur die mit reduziertem Kalomel hergestellten 3.5 n Elektroden bilden eine Ausnahme davon.

[1] Ostwald-Luther, Physiko-chemische Messungen, 3. Aufl. Leipz. 1910, S. 190.

Die leitende Verbindung zwischen den Elektroden wurde durch Eintauchen der Heberröhren in eine in einer Glasröhre angebrachte 3.5 n Kaliumchloridlösung hergestellt; an diese Röhre waren in 2—3 cm Entfernung **T** Stücke eingeschmolzen.

Die Messung der elektromotorischen Kraft wurde mit einem Potentiometer vorgenommen, und zwar wurde mit einer Genauigkeit von $^1/_{100}$ Millivolt abgelesen. Als Vergleichselektrode diente eine mit dem Kalomelpräparat Nr. 1 (gefälltem Kalomel) hergestellte 3.5 n Kalomelelektrode.

Die Zusammensetzung der gemessenen Elektroden sowie die Messresultate sind in den Tabellen I, II und III angeführt. Die Vergleichselektrode (Elektrode Nr. 1) war bei 18° angebracht; was die übrigen Elektroden betrifft, ist die Temperatur in den Tabellen angegeben. Die ersten Zahlen in den Tabellen bezeichnen die Potentiale unmittelbar nach der Herstellung der Elektroden.

Tab. I umfasst die Messungen der 3.5 n Elektroden. Nach Verlauf von 24 St. und etwa $5^1/_2$ Monat ergibt sich der Unterschied zwischen der Vergleichselektrode und den Elektroden 2—8 als

0.14, 0.05, 0.31, 0.03 — 0.05, — 0.06 und 0.10 Millivolt
(0.31), 0.27, 0.45, 0.10, 0.10, 0.01 und 0.03 Millivolt.

Diese Zahlen deuten darauf, dass Kalomel Nr. 4 (hergestellt aus Quecksilber und Chlor) eine etwas grössere Löslichkeit besitzt als die übrigen Kalomelpräparate; man kann aber natürlich diesem geringen Potentialunterschied keine wesentliche Bedeutung beimessen, namentlich da nur eine Messung eines einzelnen Präparates stattgefunden hat. Die übrigen Zahlen weisen eine gute Übereinstimmung

auf und zeigen, dass die 3.5 n Elektroden sehr haltbar sind. Zur weiteren Veranschaulichung der grossen Haltbarkeit der 3.5 n Elektrode sei angeführt, dass die Elektrode Nr. 5 in unserem Laboratorium seit ihrer Herstellung in Gebrauch ist. Im September 1923 (d. h. etwa 2 Jahre alt) wurde sie gegenüber 3 anderen jüngeren 3.5 n Elektroden gemessen, die mit 5mal umkristallisiertem und geschmolzenem Kaliumchlorid und gefälltem Kalomel hergestellt sind; das Ergebnis der Messungen war 0.01, 0.06 und 0.07 Millivolt.

Der Temperaturkoeffizient der 3.5 n Elektrode ergibt sich als sehr nahezu 0.45 Millivolt pro Grad und ist praktisch bei den verschiedenen Elektroden der gleiche. Die Einstellung des Potentials nach einer Temperaturveränderung vollzieht sich im Laufe einer Viertelstunde. Auszunehmen sind jedoch die mit reduziertem Kalomel zubereiteten Elektroden (Nr. 2 und 8), indem die Gleichgewichtseinstellung hier längere Zeit beansprucht. Bei einer Temperatursteigerung scheint die Gleichgewichtseinstellung jedoch sehr nahezu im Laufe von 1 Stunde vonstatten zu gehen, dagegen hat man bei einer Temperaturverminderung eine äusserst langsame Gleichgewichtseinstellung. Das Verhältnis springt besonders in die Augen bei Elektrode Nr. 2, wo die Einstellung monatelang dauert (vergl. die Zahlen vom $^{11}/_{1}$—$^{18}/_{5}$). Es liegt nahe, diese langsame Gleichgewichtseinstellung als eine Folge eines langsam verlaufenden Kristallisationsprozesses der betreffenden kristallinischen Modifikation von Kalomel zu erklären.

Die Tabb. II und III umfassen die Messungen der 0.1 n Elektroden; sie ergeben nach 24 St. die folgenden Potentiale zwischen der Vergleichselektrode und den Elektroden 9—16:

83.10, 83.31, 83.23, 83.50, 83.06, 83.15, 83.00, 83.17 Millivolt.

Man sieht, dass Kalomel Nr. 4 auch bei den Messungen der 0.1 Elektroden eine etwas grössere Löslichkeit besitzt als die übrigen Kalomelpräparate. Im übrigen ist die Übereinstimmung befriedigend und die Haltbarkeit der Elektroden tadellos.

Der Temperaturkoeffizient der 0.1 n Elektrode ergibt sich als 0.77 Millivolt pro Grad. Die Einstellung des Potentials nach einer Temperaturveränderung geschieht im Laufe von 5 Min. oder noch kürzerer Zeit.

Berechnet man mittels der Tab. I die Potentiale zwischen der 0.1 n und 3.5 n Elektrode der verschiedenen Kalomelpräparate, erhält man folgendes Resultat:

Kalomel Nr.	1	2	3	4	5	6	7
Potential	83.10,	83.17,	82.96,	83.19,	83.18,	83.20,	83.06 Milliv.

Der mittlere Wert der obenstehenden Zahlen ist 83.13 Millivolt.

Es erübrigt noch die Frage nach der Ursache der höheren Werte, die man 1920 im chemischen Laboratorium der Kopenhagener Universität und in unserem Laboratorium fand. Die oben mitgeteilten Untersuchungen zeigen, dass der Fehler kaum von dem Kalomel herrührte, und da in unserem Laboratorium auch bei den früheren Untersuchungen reines, destilliertes Quecksilber benutzt worden ist, muss man annehmen, dass die Nichtübereinstimmung von dem angewandten Kaliumchlorid herrührte.

Sowohl die 0.1 n als die 3.5 n Elektrode ergab sich, wie aus dem vorhergehenden erhellt, als sehr haltbar. Bei der täglichen Benutzung der Elektroden für elektrometrische Messungen zeigt sich die 0.1 n Elektrode indessen als weniger haltbar als die 3.5 n Elektrode. Die Veränderung geht in der Richtung, dass der Potentialunter-

schied zwischen den beiden Elektroden geringer wird, was sich durch die Annahme erklären lässt, dass im Laufe der Zeit ein wenig Kaliumchlorid in die 0.1 n Elektrode aus der 3.5 n Kaliumchloridlösung, die als Zwischenflüssigkeit benutzt wird, hineindiffundiert. Ausser der grösseren Haltbarkeit weist die 3.5 n Elektrode der 0.1 n Elektrode gegenüber den Vorteil auf, dass sie einen kleineren Temperaturkoeffizienten besitzt, andererseits geht aber die Einstellung des Potentials nach einer Temperaturveränderung bei der 0.1 n Elektrode schneller vonstatten.

Schliesslich bitte ich noch den Chef des chemischen Laboratoriums der Königl. tierärztlichen und landwirtschaftlichen Hochschule zu Kopenhagen, Herrn Prof., Dr. phil. Niels Bjerrum, für die mir zur Anstellung der Untersuchungen gebotene Gelegenheit meinen besten Dank entgegenzunehmen.

Færdig fra Trykkeriet den 15. Februar 1924.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **V**, 10.

UNDERSØGELSER OVER GNISTEN VED EN KVÆGSØLVSTRAALEKOMMUTATOR

AF

JUL. HARTMANN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1924

Forsøgsapparatet.

Emnet for det efterfølgende Arbejde er den Gnist, der dannes ved Afbrydning af en elektrisk Strøm flydende i en Kreds med Selvinduktion. I det betragtede Tilfælde skete denne Afbrydning ved Hjælp af et egenartet Apparat, hvis Princip kort skal antydes. Man tænke sig en uendelig lang bølgeformet bøjet Leder J, Fig. 1, der bevæger sig fremad med en konstant Hastighed v. I Lederens Bane er anbragt to Elektroder E og E_1, gennem hvilke den bevæger sig uden Hindring. Elektroden E_1 begrænses af en isolerende Væg P med fortil skærpet Kant. Af denne Kant overskæres den bølgeformede Leder. Man forstaar, at denne sidste periodisk vil slutte og afbryde Forbindelsen mellem E og E_1. Forbindelsen varer saa lang Tid, som Lederen er om at bevæge sig en halv Bølgebredde $\lambda/_2$ fremefter. Afbrydelsen varer nøjagtig lige saa længe.

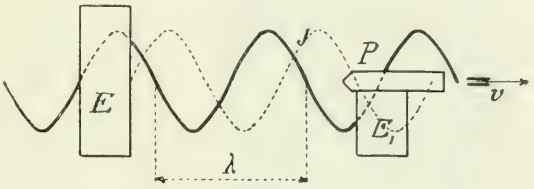

Fig. 1.
En uendelig lang bølgeformet Leder J bevæger sig med jævn Hastighed v fremad. Herved sluttes og afbrydes periodisk den elektriske Forbindelse mellem to Elektroder E og E_1, gennem hvilke Lederen antages at trænge uden Hindring.

Den Maade, hvorpaa man kan virkeliggøre en Leder som den antydede eller i ethvert Fald en Leder af samme

Karakter, er vist i Fig. 2. R er her et Rør, ud af hvilket der træder en Kvægsølvstraale J. Straalen passerer et konstant Magnetfelt F og derefter en Elektrode E (svarende til E i Fig. 1). Gennem E og R kan man sende en Vekselstrøm, leveret af Transformatoren T, ind og ud af den Del af Straalen, som passerer Feltet. Under Indflydelse af Vekselvirkningen mellem en saadan Strøm og Feltet vil Straalen antage Form af en Bølgefigur, der bevæger sig fremad med den oprindelige Straales Hastighed, en Bølgebredde λ i Perioden for den Vekselstrøm, der benyttes til Fremstilling af Bølgerne. Naar bortses fra, at disses Højde vokser, efterhaanden som den bølgeformede Straale skrider frem, adskiller Kvægsølvlederen sig, som det ses, i ingen Henseende fra Lederen i Fig. 1, og den kan derfor benyttes ganske som denne til afvekslende at slutte og afbryde Forbindelse mellem to Elektroder E og E_1.*

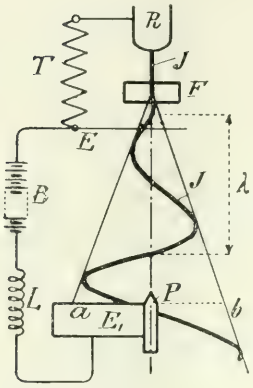

Fig. 2.
Virkeliggørelse af den vandrende bølgeformede Leder ved en Kvægsølvstraale, der passerer et konstant Felt F og selv passeres af en Vekselstrøm, leveret af Transformatoren T. Figuren antyder tillige en Strømkreds med Selvinduktion L og en Spændingskilde B. Denne Kreds sluttes og afbrydes afvekslende af den bølgende Straale.

Afbrydningsgnistens Struktur belyst ved Fotografier af Gnisten.

Dersom der nu, som antydet i Fig. 2, mellem E og E_1 er indskudt en Strømkreds indeholdende en Strømkilde B og en Selvinduktion L, vil der, i den Tid Straalen slutter

* Princpet er af Forfatteren benyttet i periodiske Afbrydere og i Ensrettere. For disse Anvendelser er der gjort Rede i »Nye Ensrettere og Periodiske Afbrydere« Kjøbenhavn 1918.

Forbindelsen mellem E og E_1, vokse en Strøm op i Kredsen. Denne Strøm vil blive brudt i det Øjeblik, Kanten af P overskærer Straalen. Herved opstaar en Gnist, Afbrydningsgnisten, hvis Energi i Hovedsagen stammer fra den elektrokinetiske Energi, der i Afbrydningsøjeblikket var opmagasineret i Selvinduktionen L's Felt. Det er denne Gnist, vi skal betragte. Afbrydningen fandt i Hovedundersøgelsen, med en enkelt Undtagelse, altid Sted i en Atmosfære af Brint eller Belysningsgas, og kun for disse Luftarter, der i alt væsentlig forholder sig ens, gælder derfor de nedenfor fremstillede Hovedresultater.

Fig. 3.
Tre Afbrydningsgnister, hver indeholdende en Energi paa ca. 1.6 Watt Sek. Regelmæssige Gnister.

Den mest umiddelbare Forestilling om Gnistens Struktur faar man ved at optage fotografiske Billeder af Gnisten. Fig. 3 gengiver i naturlig Størrelse tre paa hinanden følgende Afbrydningsgnister, hver rummende en Energi paa ca. 1.6 Watt Sek., d.v.s. en i denne Forbindelse jævn stor Gnist. Som det ses, bestaar hver Gnist i Hovedsagen af en enkelt Lysbue af ret lunefuld Form. De gengivne Gnister hidrører fra en meget regelmæssigt arbejdende Afbryder eller Kommutator med pludselig og veldefineret Overskæring af Straalen. Dette giver sig netop til Kende i den enkle Karakter af Gnistbilledet,

hvortil der, som vi straks skal se, svarer et regelmæssigt formet Billede, Oscillogram, af den gennem Gnisten flydende Strøm. Ved mindre regelmæssig Kommutering absorberes hele Gnistenergien ikke i en enkelt Udladning, men der optræder efter hinanden en Række Udladninger; Fig. 4 giver et Eksempel herpaa. At Udladningerne finder Sted efter hinanden, fremgaar ofte af selve Gnistfotografiet. Paa dette ser man ved tilstrækkelig Intensitet et Billede af Gnistens Refleks i selve Straalen. Man skimter f. Eks. denne Refleks i Fig. 5 umiddelbart til højre for Gnisten. Naar det nu viser sig, at Refleksen fremtræder som en Dobbeltlinie i Tilfælde, hvor Gnisten har delt sig i to Udladninger, saa fremgaar det heraf, at der er forløbet en vis Tid mellem Fremkomsten af den ene og den anden af disse. I Fig. 5 kan man, omend ikke meget tydeligt, se, at Refleksen i Straalen er dobbelt. Det skal endnu bemærkes, at Refleksen viser, hvor Straalen befandt sig i Forhold til den isolerende Vægs Kant i Øjeblikket for den metalliske Forbindelses Ophør. Det fremgaar af de originale Fotografier, at Straalen som Helhed længst har passeret Isolatorens skærende Kant, i det Øjeblik Gnisten dannes.

Fig. 4.
Gnist, der har delt sig op i flere efter hinanden fremkomne Enkeltudladninger.

Fig. 5.
Fotografi, der viser Refleksen af Gnisten i den blanke Straalebugt. Refleksen viser Straalebugtens Stilling, paa det Tidspunkt Gnisten dannes. Af Refleksbaandets Struktur kan man slutte sig til Gnistens Bygning og Varighed. Ved en dobbelt Gnist ses to adskilte Reflekser.

Der maa altsaa være dannet en Kvægsølvstreng, der først brister efter at være trukket ud til en vis Længde. I Fig. 6 er der givet et skematisk Billede af Strengen liggende tværs over *P*'s Kant. Billedet skal belyse, hvorledes man kan tænke sig, at de enkelte Udladninger i en sammensat Gnist bliver til. Strengen er først bristet ved *1*, og Udladning *1* er indledet. Før den hele magnetiske Energi er fortæret i denne Udladning, er Resten af Strengen bristet ved 2, og der indledes følgelig en ny Udladning 2. Som her antydet er Forholdene altsaa formentlig ved mindre præcis Kommutering. Ved meget regelmæssig Kommutering brister Strengen kun eet bestemt Sted, og al Energien omsættes i een Udladning, der dog ofte har en vis Struktur, idet den paa en Del af sin Længde kan være delt i tydelig adskilte Grene. Maaske er der i Virkeligheden Tale om uafhængige Udladninger, der finder Sted meget kort Tid efter hinanden og udgaar praktisk set fra samme Punkt.

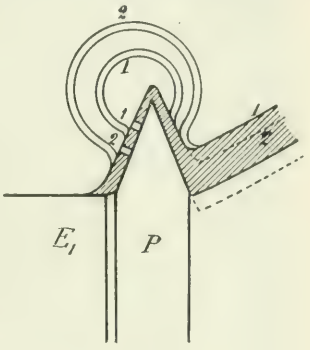

Fig. 6.
Skematisk Billede af Forholdene ved Straalens Overskæring. Tværs over den skærende isolerende Kant dannes en Streng. Denne er først bristet ved *1* og Udladningen *1* er dannet. Lidt senere er Strengen bristet ved 2, hvilket har givet Anledning til Fremkomsten af den nye Udladning 2. Ved regelmæssig Overskæring brister Strengen kun et Sted, og der dannes een enkelt Gnist.

Strukturen belyst ved Oscillogrammer for Gniststrøm og Gnistspænding.

Et andet Middel til Belysning af Afbrydningsgnistens Struktur er samtidige Billeder, Oscillogrammer, af Gniststrømmens og Gnistspændingens Variation med Tiden. Saadanne Billeder blev i stort Tal fremstillet ved Hjælp af en

følsom og hurtig tegnende Duddell-Oscillograf. Strømsløjfen i denne blev forbundet til Polerne af en i Strømkredsen indskudt Shunt *S*, Fig. 7, ved Hjælp af Ledningerne *a* og *b*. Spændingssløjfen blev forbundet med de to Sider af Gnistrummet ved Ledningerne *b* og *c* under Indskydelse af en passende Forlagsmodstand R_0. Ved regelmæssig Overskæring af Straalen, d.v.s. ved Gnister, bestaaende af kun een Udladning, har den Del af Dobbeltoscillogrammet, som her interesserer os, den Form, som er vist i Fig. 8*a*. Øverst ses den affaldende Strøm gennem Gnisten, nederst den Spænding, som induceres i *L* ved Strømmens Aftagen. Spændingskurven fremtræder som en enkelt skarp udpræget Spids. Fig. 9*a* viser et virkeligt Oscillogram af den her betragtede regelmæssige Type. Øverst ses i den brat affaldende Del af Kurven Strømoscillogrammet, nederst det tilsvarende Spændingsoscillogram. Dersom Gnisten bestaar af to efter hinanden følgende Udladninger, træder dette yderst tydeligt frem i Oscillogrammet, der da faar det i Fig. 8*b* viste Udseende. Kommuteringen er begyndt med en enkelt Udladning, der giver et regelmæssigt

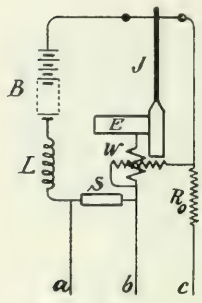

Fig. 7.
Opstilling til Optagelse af Billeder ved Oscillograf af Gniststrømmen og Gnistspændingen, samt til wattmetrisk Maaling af den i Gnisten indeholdte Energi. Oscillografens Strømsløjfe er indskudt mellem *a* og *b*, dens Spændingssløjfe mellem *b* og *c*. Wattmetret er antydet ved *W*.

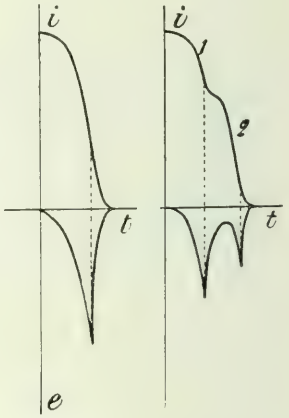

Fig. 8*a*. Fig. 8*b*.
a. Skematisk Dobbeltoscillogram for en enkelt Gnist. Øverst Strømmens, nederst Spændingens Variation med Tiden *t*.
b. Skematisk Dobbeltoscillogram for en Gnist med to Udladninger. Til disse svarer to Afsatser i Strømkurven og to Spidser i Spændingskurven.

Oscillogram *1*. Efter en vis Tid sætter en ny Udladning ind med sit regelmæssige Oscillogram *2*, der fortsætter, hvor *1* slap. Særlig tydelig giver Opdelingen af Gnisten i to eller flere Udladninger sig til Kende i Spændingsdiagrammet, der faar et Antal Spidser, svarende til Antallet af Udladninger. Fig. 9*b* gengiver Oscillogrammet for en Gnist, der har delt sig op i tre Udladninger, hvad der altsaa viser sig ved tre Spidser i Spændingsdiagrammet og ved tre Aftrapninger paa Strømdiagrammet.

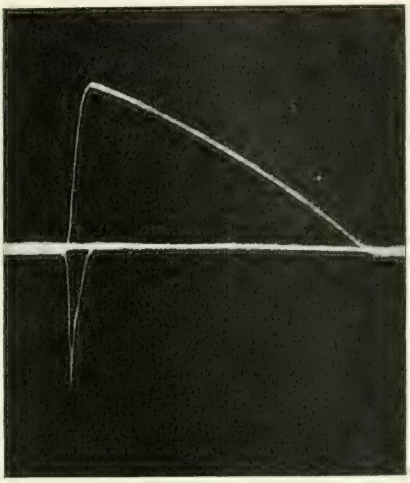

Fig. 9*a*.
Virkeligt Oscillogram for en enkelt Gnist.

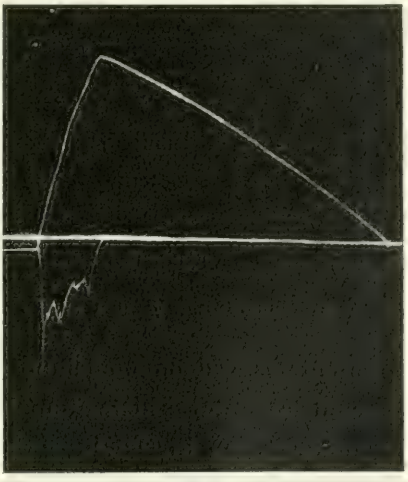

Fig. 9*b*.
Virkeligt Oscillogram for Gnist med tre Udladninger.

Gnistkurvens Ligning.

Den affaldende Del af Oscillogrammet, der viser, hvorledes Strømmen aftager gennem Gnisten, har ved regelmæssige Gnister, bestaaende af een enkelt Udladning, en ejendommelig simpel Form, der paa Forhaand gør det sandsynligt, at Kurven med god Tilnærmelse kan fremstilles ved et relativt simpelt matematisk Udtryk. Dette viser sig

ogsaa at være Tilfældet. Fig. 10, Kurve *a*, viser en Gnistkurve, tegnet paa Grundlag af omhyggelig Opmaaling af et Oscillogram. Paa dette Oscillogram prøvedes forskellige Hypoteser. I dem alle antoges det, at Gnisten kunde re-

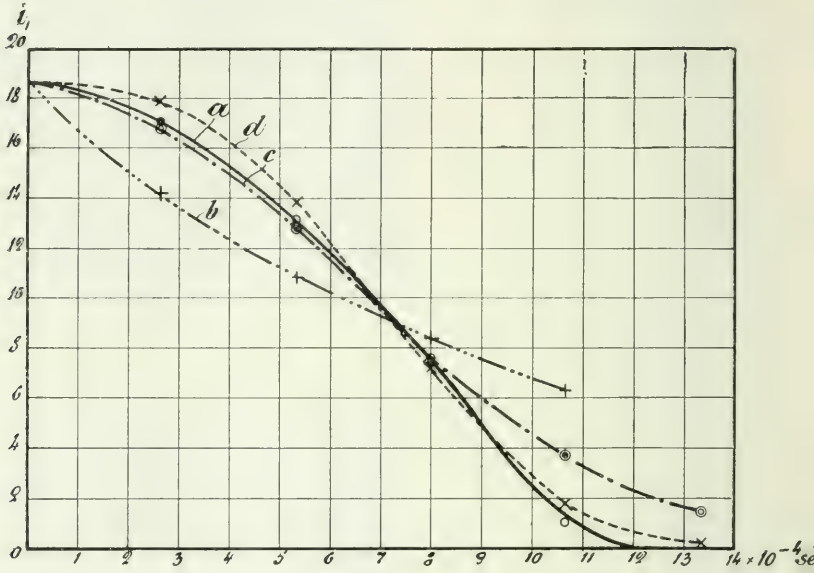

Fig. 10.

Gniststrømsoscillogrammet — (*a*) — afbildet ved forskellige analytiske Udtryk: (*b*) $i = \bar{i}\, e^{-\frac{\mu}{L}\cdot t}$, svarende til konstant Gnistmodstand r_g lig μ. (*c*) $i = \bar{i}\, e^{-\frac{\mu}{2L}\cdot t^2}$, svarende til $r_g = \mu t$ og (*d*) $i = \bar{i}\, e^{-\frac{\mu}{3L}\cdot t^3}$ svarende til $r_g = \mu t^2$.

præsenteres ved en Modstand r_g, der ændres med Tiden t. Fremdeles antoges det, at man kunde se bort fra den Modstand, Kredsen iøvrigt indeholdt, og at Strømkildens Spænding kunde betragtes som forsvindende i Sammenligning med den Spænding, der, medens Gnisten varer, induceres i Kredsens Selvinduktion. Begge Betingelser var fuldtud opfyldt i Tilfældet gengivet i Fig. 10, Kurve *a*. Oscillogrammet her stammede nemlig fra en Strømkreds med Vekselspænding og praktisk set uden Modstand. Og Gnisten dannedes

meget nær i det Øjeblik, da Spændingen skiftede Fortegn. Under disse Forhold har man da for Kredsen, saa længe Gnisten varer:

$$-L\cdot\frac{di}{dt}=i\,r_g\,, \tag{1}$$

naar i betegner Strømmen gennem Gnisten.

Løsningen af (1) afhænger af, hvorledes r_g antages at variere med Tiden. Hvis r_g var konstant lig μ skulde Strømmen aftage efter Udtrykket

$$i=\bar{i}e^{-\frac{\mu}{L}t}=\bar{i}e^{-bt}\,, \tag{2}$$

hvor $\bar{i}$ betegner Strømmens Værdi i det Øjeblik $t=0$, da Afbrydningen finder Sted, og Gnisten dannes. Fig. 10, Kurve *b*, viser denne Løsning afpasset saaledes, at den beregnede Kurve falder sammen med den iagttagne i dennes halve Højde. Ganske øjensynlig er Forudsætningen om en konstant Modstand ret falsk. Hvis Modstanden antoges at vokse proportionalt med Tiden efter Udtrykket $r_g=\mu t$, skulde Gniststrømmen blive

$$i=\bar{i}e^{-\frac{\mu}{2L}t^2}=\bar{i}e^{-bt^2}\,. \tag{3}$$

Fig. 10, Kurve *c*, viser denne Løsning, der langt bedre afbilder de faktiske Forhold, dog endnu ikke helt godt i den sidste Del af Tidsintervallet, hvor Modstanden øjensynlig stiger væsentlig hurtigere end forudsat. Det ligger da nær at prøve Hypotesen $r_g=\mu t^2$, der fører til:

$$i=\bar{i}e^{-\frac{\mu}{3L}t^3}=\bar{i}e^{-bt^3}\,. \tag{4}$$

Den sidste Løsning er gengivet i Fig. 10, Kurve *d*, der som Helhed slutter sig ret godt til den iagttagne Kurve. Den her antydede Prøve gennemførtes for et Antal Tilfælde.

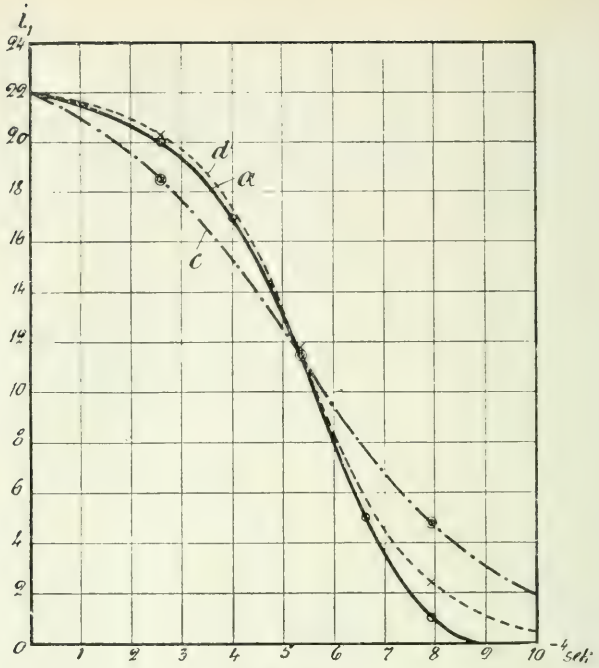

Fig. 11 *a*.

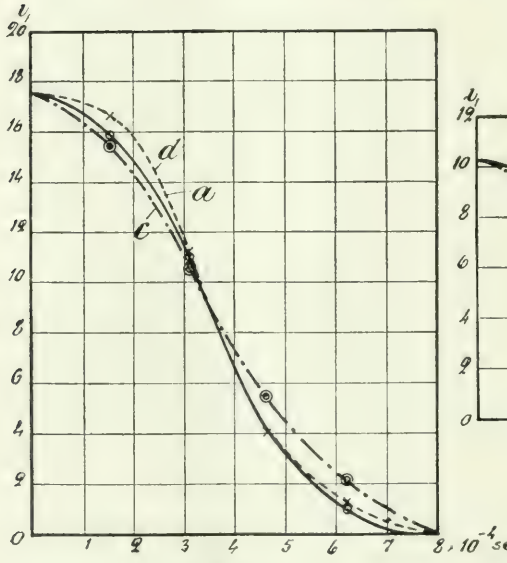

Fig. 11 *b*.

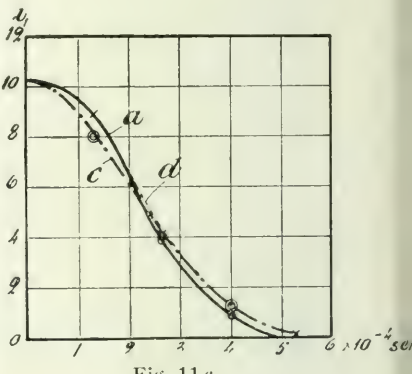

Fig. 11 *c*.

Fig. 11 *a*—*c*.

Forskellige Gnistoscillogrammer, Kurverne *a*, sammenlignet med de analytiske Udtryk $i = \bar{i}\, e^{-\frac{\mu}{2L}\cdot t^2}$, Kurverne *c*, og $i = \bar{i}\, e^{-\frac{\mu}{3L}\cdot t^2}$, Kurverne *d*.

Fig. 11 *a*—*c* gengiver 3 af disse. Som det ses, slutter Udtrykket (4) sig i alle Tilfælde som Helhed bedst til Iagttagelserne. De optrædende Afvigelser er i alle Tilfælde af samme Type. Modstanden vokser til at begynde med næppe saa hurtigt, mod Slutningen noget hurtigere end forudsat. Afvigelserne kan dog vistnok betegnes som relativt smaa.

Det er ganske interessant at bemærke, at Anden-Potens-Loven for Modstandens Opvoksen er den, man føres til for en vædskeformet Leder, hvis Længde vokser proportionalt med Tiden. Samtidig med, at Længden vokser paa denne Maade, maa jo nemlig Tværsnitsarealet gaa ned med første Potens af Tiden t, saaledes at Forholdet mellem Længde og Tværsnitsareal og dermed Modstanden vokser med t^2. Dersom det antoges, at den vædskeformede Leder tilsidst brister, som Følge af at der opstaar »Indsnoringer« paa den som paa Objektet i en Strækkeprøve, bliver Analogien mellem den vædskeformede Leder og Gnisten endnu nøjere. Thi saa snart Indsnoringen begynder, vokser Modstanden hurtigere end med anden Potens af Tiden, ganske som Tilfældet er med Gnisten umiddelbart før dennes Slukning.

Gnistkurvens Afhængighed af Effekten.

Den sidst antydede Undersøgelse, der førte til Udtrykket (4) for Gniststrømmens Variation med Tiden, blev foretaget med Oscillogrammer, der som antydet stammede fra en særlig Strømkreds, nemlig en Strømkreds i en mekanisk Ensretter. I denne Kreds hidrørte Selvinduktionen fra Spredningsfeltet i en Transformator. Det syntes ønskeligt at arbejde med noget mere veldefinerede Forhold end dem, der stod til Raadighed i Ensretteranlægget. De efterfølgende Undersøgelser udførtes derfor med en simpel Strømkreds som i Fig. 2 resp. Fig. 7. B var herved et Akkumulatorbatteri, hvis Celleantal ændredes, naar Gnisteffekten skulde ændres. L betegner kendte jærnfri Selvinduktioner, Der benyttedes tre saadanne paa henholdsvis 4.7, 15.8 og 31.3 Millihenry.

I Kredsen var der ingen Modstand ud over den, Selv-

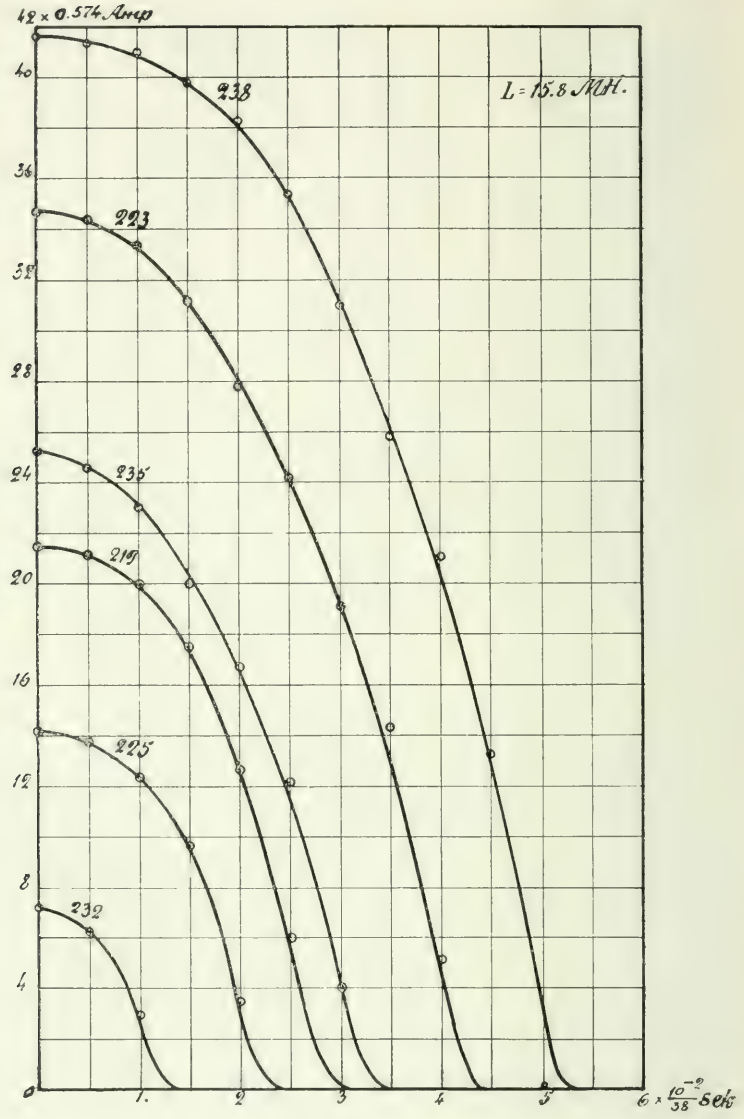

Fig. 12.
Gniststromsoscillogrammer for en Kreds med Selvinduktion $L = 15.8$ Millihenry.

induktionerne og Ledningerne rummede, d. v. s. ved 4.7 M.H. 0.85 Ohm, ved 15.8 M.H. 1.05 Ohm og ved 31.3 M.H. 1.45 Ohm.

Afbryderen holdtes i Gang ved 50-periodet Vekselstrøm. Kredsen afbrødes altsaa 50 Gange pr. Sek.

Med denne Kreds udførtes Undersøgelser over, hvorledes Gnistkurven afhænger af den i Gnisten indeholdte Effekt. Gnisteffekten, altsaa den samlede Energi i de 50 Gnister, der dannedes i hvert Sekund, maaltes ved Hjælp af et Wattmeter W, indskudt som antydet i Fig. 7. Paalideligheden af denne Metode til Maaling af Gnistens Energi prøvedes særskilt. Samtidig med at Effekten iagttoges, optoges Dobbeltoscillogrammer, som tidligere beskrevet.

I hosstaaende Tabel er Resultater af Udmaalinger paa de forstørrede Oscillogrammer gengivne. Strømoscillogrammerne svarende til Selvinduktionen $L = 15.8$ M.H. er reproducerede i Fig. 12. De udviser en betydelig Regelmæssighed, men alle Gnister var utvivlsomt ogsaa enkle. Det samme gjaldt sikkert de øvrige her betragtede Gnister. Alle de nedenfor anførte teoretiske Resultater gælder derfor kun saadanne simple Gnister.

	W_g	$t_{\frac{1}{2}}$	$t_{\frac{1}{2}}^3$	b	L	E
	Watt	Sek.			M.H.	Volt
K 238	310	$10.3 \cdot 10^{-4}$	$1100 \cdot 10^9$	$0.63 \cdot 10^9$	15.8	61.5
223	210	8.31 —	574 —	1.21 —	—	51.0
235	131	6.32 —	252 —	2.75 —	—	41.0
219	76	5.60 —	176 —	3.94 —	—	31.0
225	30	4.47 —	90 —	7.70 —	—	20.5
232	7.5	2.37 —	13.3—	52.0 —	—	10.5
K 237	190	7.62 —	442 —	1.57 —	31.3	61.5
222	125	7.18 —	370 —	1.87 —	—	51.0
224	19.5	3.55 —	45 —	15.4 —	—	20.5
K 236	200	8.40 —	592 —	1.17 —	4.7	41.0
226	46	4.36 —	83 —	8.35 —	—	20.5
233	10	2.68 —	19.2—	36.1 —	—	10.5

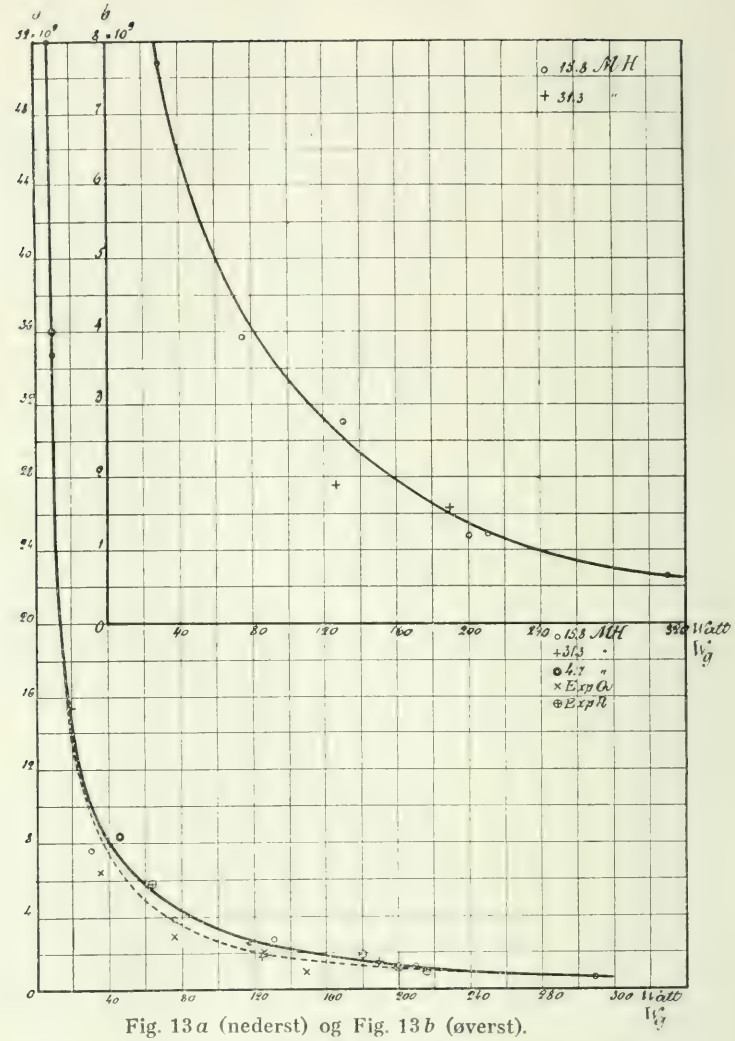

Fig. 13 *a* (nederst) og Fig. 13 *b* (øverst).

Fig. 13 *a*—*b*.

Kurver, der viser Gniststrømskurvens Afhængighed af Gnisteffekten W_g, d. v. s. Effekten ved 50 Gnister pr. Sek. Ordinaten er Koefficienten b i Udtrykket $i = \bar{i}\, e^{-bt^2}$. Abscissen er W_g maalt i Watt. Kurverne viser, at b kan udtrykkes ved $b = 265 \cdot 10^9 / W_g$.

I Tabellen betyder W_g Gnisteffekten i Watt ved 50 Gnister pr. Sek. Under $t_{\frac{1}{2}}$ er anført Tiden for Gniststrømmens Aftagen til sin halve Værdi. Størrelsen b betegner Koefficienten

i Udtrykket (4) for Gniststrømmen. E er Kredsens konstante Spænding, L dens Selvinduktion maalt i Millihenry. Koefficienten b bestemtes af $t_{\frac{1}{2}}$ ved Hjælp af Udtrykket:

$$b = \frac{\log \text{nat } 2}{t_{\frac{1}{2}}^{3}},$$

et Udtryk, der direkte udledes af (4) pg. 11. Tiden $t_{\frac{1}{2}}$ udmaaltes direkte paa det forstørrede Oscillogram.

Materialet er vel egnet til en Undersøgelse af Loven for b-Koefficientens Afhængighed af Gnisteffekten W_g. I Fig. 13*a* er denne Undersøgelse udført. Den fører til et særdeles anskueligt Resultat. For det første ses det umiddelbart, at W_g-b-Kurven, den optrukne, nærmer sig stærkt til en ligesidet Hyperbel. Produktet $b \cdot W_g$ er altsaa meget nær konstant. Og yderligere viser Kurven, at b er uafhængig af Selvinduktionen. Det er altsaa ligegyldigt, om en bestemt Gnisteffekt W_g fremkommer ved Afbrydning af en stærk Strøm i en lille Selvinduktion eller en svag Strøm i en stor. Undersøgelsen kan suppleres med Iagttagelser hentede fra de ovenfor antydede Ensretterforsøg. Disse er betegnede ved Q og R. Tages Hensyn til de fra disse Forsøg hidrørende Punkter, maa Kurven tegnes som den punkterede. Hvor nær den ved alle Forsøg bestemte W_g-b-Kurve kommer til en ligesidet Hyperbel, fremgaar af hosstaaende numeriske Prøve.

W_g	b	$W_g \cdot b$
20	14 $\cdot 10^9$	$280 \cdot 10^9$
40	7.2 —	288 —
60	4.9 —	294 —
80	3.5 —	280 —
100	2.6 —	260 —
150	1.5 —	225 —
200	1.2 —	240 —
250	1.0 —	250 —
		$265 \cdot 10^9$

I Fig. 13*b* er den nederste Del af W_g-b-Kurven tegnet med forstørrede Ordinater.

Ved Tegningen er der dog kun benyttet Punkter fra Forsøgene med de jærnfri Selvinduktioner.

Gnistens Varighed.

For Gnister bestaaende af en enkelt Udladning gælder altsaa med god Tilnærmelse, at Strømmen gennem Gnisten kan skrives:

$$(1) \qquad i = \bar{i} \cdot e^{-b t^3},$$

hvor

$$(2) \qquad b = 265 \cdot 10^9 / W_g .$$

Af (1) og (2) udleder man for den Tid $t_{\frac{1}{2}}$, i Løbet af hvilken Gniststrommen synker til det halve af sin oprindelige Værdi, Udtrykket

$$(3) \qquad t_{\frac{1}{2}} = \frac{(\log \text{ nat } 2)^{\frac{1}{3}}}{b^{1/3}} = 0.138 \cdot 10^{-3} \sqrt[3]{W_g} \quad (W_g \text{ Watt}).$$

Oscillogrammets Bredde i halv Højde, hvilken Størrelse vi vil betragte som et Maal for Gnistens Varighed, skal altsaa være proportional med $\sqrt[3]{W_g}$. I efterfølgende Tabel er (3) prøvet ved Oscillogrammerne 219—238 i Fig. 12.

Osc.	W_g	$t_{\frac{1}{2}}$ ber.	$t_{\frac{1}{2}}$ obs.
	Watt	Sek.	Sek.
238	310	$9.35 \cdot 10^{-4}$	$10.3 \cdot 10^{-4}$
223	210	8.18 —	8.32 —
235	131	7.00 —	6.31 —
219	76	5.84 —	5.62 —
225	30	4.29 —	4.50 —
232	7.5	2.70 —	2.32 —

Overensstemmelsen er, som det ses, fortrinlig. I Fig. 14 er Prøven foretaget grafisk, idet $t_{\frac{1}{2}}$, udmaalt direkte paa Oscillogrammerne, er afsat i Afhængighed af $\sqrt[3]{W_g}$-Kurven, som efter Teorien skulde være retliniet, er det ogsaa i

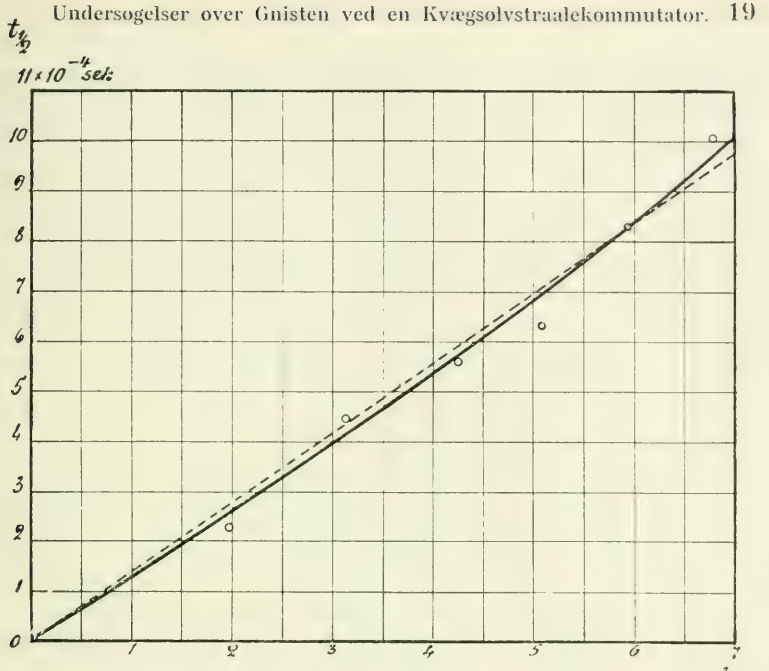

Fig. 14.

Gnistens Varighed, maalt ved Tiden $t_{\frac{1}{2}}$ for Strømmens Aftagen til sin halve Værdi, fremstillet i Afhængighed af $\sqrt[3]{W_g}$. (W_g Gnisteffekten i Watt ved 50 Gnister pr. Sek.); $t_{\frac{1}{2}}$ er med god Tilnærmelse proportional med $\sqrt[3]{W_g}$.

Hovedsagen, selv om en ganske ringe Krumning vel nok kan spores.

Gnistens Modstand og Spændingsfald.

Ifølge de Betragtninger, der førte til Udtrykket for Gniststrømmen, skulde Konstanten b være givet ved

$$b = \mu/3L, \tag{1}$$

hvor μ atter betyder Koefficienten i Udtrykket

$$r_g = \mu l^2 \tag{2}$$

for Gnistens Modstand.

Har man altsaa ved Hjælp af Oscillogrammet bestemt b, og kendes Selvinduktionen L, kan μ beregnes og der-

med Gnistmodstanden i Afhængighed af Tiden. I hosstaaende Tabel er Beregningen udført for Oscillogrammerne 238 og 219 Fig. 12.

Osc. 238, $b = 0.630 \cdot 10^9$, $L = 15.8$ M.H., $\mu = 29.8 \cdot 10^6$, $W_g = 310$ Watt.

t	i_g	r_g	e_g
Sek.	Amp.	Ohm	Volt
0	24.0	0	0
$2.63 \cdot 10^{-4}$	23.6	2.05	48.5
5.26 —	21.8	8.25	180
7.89 —	17.6	18.5	326
10.52 —	11.5	33.0	379
13.15 —	5.0	51.5	258
15.78 —	2.0	74.1	148

Osc. 219, $b = 3.67 \cdot 10^9$, $L = 15.8$ M.H., $\mu = 174 \cdot 10^6$, $W_g = 76$ Watt.

t	i_g	r_g	e_g
Sek.	Amp.	Ohm	Volt
0	12.3	0	0
$2.63 \cdot 10^{-4}$	11.5	12	138
5.26 —	7.2	48	346
7.89 —	2.0	116	232

Naar man herefter har sammenhørende Værdier af Strøm og Modstand, kan Spændingsfaldet e_g i Gnisten beregnes. De beregnede Værdier er anført i Tabellerne under e_g. Tabellen for Osc. 238 er afbildet grafisk i Fig. 15. Her betegner C_c den beregnede Strømkurve (i_g, t), C_o den direkte iagttagne. Sammenfaldet er over største Delen af Kurven næsten absolut. Kun paa den nederste Del viger de to Kurver ud fra hinanden. R_c giver Kurven for r_g, V_c er den

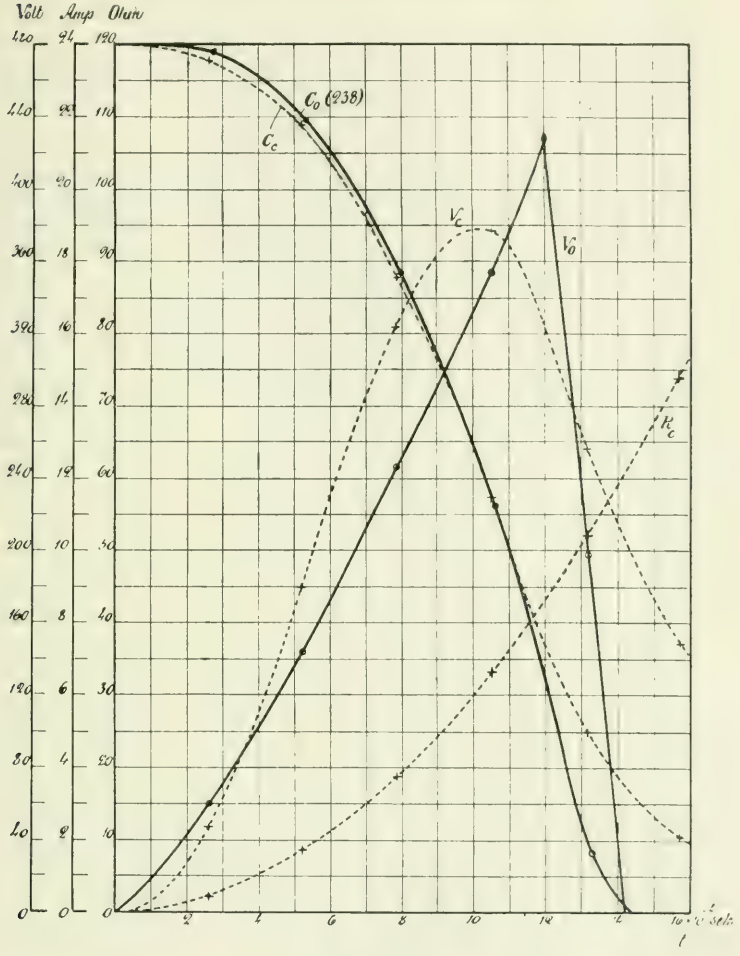

Fig. 15.

Analyse af Oscillogram 238 svarende til Effekten $W_g = 310$ Watt ved 50 Gnister pr. Sek. C_o direkte iagttagne Oscillogram. C_c Oscillogram beregnet af Udtrykket $i_g = \bar{i}\, e^{-0.630 \cdot 10^3\, t^2}$. R_c Kurve for Gnistmodstandens Variation med Tiden beregnet af $r_g = 29.8 \cdot 10^3\, t^2$. V_o direkte iagttagne Spændingsoscillogram, V_c Spændingsoscillogram beregnet af C_c og R_c.

beregnede Kurve for e_g. Den faktiske, der udmaaltes paa Oscillogrammet, var V_o, der er karakteristisk ved at være spidsere, svarende til, at den virkelige Strømkurve falder brattere af end den teoretiske. Af C- og V-Kurverne kunde

Gnistens Karakteristik, d. v. s. e_g, i_g-Kurven udledes. Spørgsmaalet om Gnistkarakteristiken skal imidlertid betragtes for sig i det følgende Stykke.

Paa dette Sted skal der gøres en Bemærkning angaaende, hvad der i det foregaaende er empiriske, og hvad der er teoretiske Resultater. Det er en ren Erfaringssag, at Gnistkurven i alle de betragtede Tilfælde ogsaa de, hvor Kredsen indeholdt Modstand og konstant Spænding, med god Tilnærmelse afbildes ved Udtrykket $i = \bar{i} e^{-bt^3}$. Det er fremdeles en Erfaringssag, at b er omvendt proportional med den i Gnisten indeholdte Effekt, eller at Gnistens Varighed maalt ved $t_{\frac{1}{2}}$ er proportional med den tredie Rod af Effekten. Derimod er Værdierne for Modstanden og Spændingsfaldet ovenfor udledt paa Grundlag af en Teori for den gennem Gnisten sluttede Kreds. Og denne Teori bygger paa Forudsætning om, at Kredsen udenfor Gnisten praktisk set ingen Modstand indeholder og om, at der ingen elektromotorisk Kraft findes i Kredsen undtagen den i Selvinduktionen inducerede. Hvis disse Forudsætninger ikke er praktisk set opfyldt, bliver r_g og e_g heller ikke helt rigtige. Utvivlsomt kan alligevel Tabellen ovenfor give os et Holdepunkt for Vurderingen af de Fejl, der begaas ved i Udledningen af Udtrykkene for Gniststrømmen pag. 11 at se bort fra Kredsens øvrige Modstand og den konstante Spænding i Kredsen. I Tilfældet Osc. 238 var Kredsens Modstand 0.85 Ohm, den konstante Spænding var 61.5 Volt. Som det ses, vokser Gnistens Modstand og Spændingsfald ret hurtigt op over disse Værdier. I Tilfældet 219 var Modstanden udenfor Gnisten ligeledes 0.85 Ohm, men Spændingen kun 31 Volt. Af de anførte Tal sluttes, at Modstand og Spænding næppe kan have nogen væsentlig Indflydelse ved svagere Gnister. Ved meget kraftige Gnister (som Gnisten 238) er der Mulighed for en noget større Indflydelse, særlig maaske i Begyndelsen. Nedenfor skal der gøres et Forsøg paa at vurdere denne Indflydelse.

Gnistens Karakteristik.

Med Opstillingen afbildet ovenfor i Fig. 7 faar man samtidig optaget et Billede af Gniststrømmen og af den paa Gnistrummet virkende Spænding. Oscillogrammet giver altsaa sammenhørende Værdier af Spænding og Strøm, og man er følgelig i Stand til at tegne Gnistens e-i-Karakteristik. I Fig. 15 er der i C_o og V_o givet stærkt forstørrede

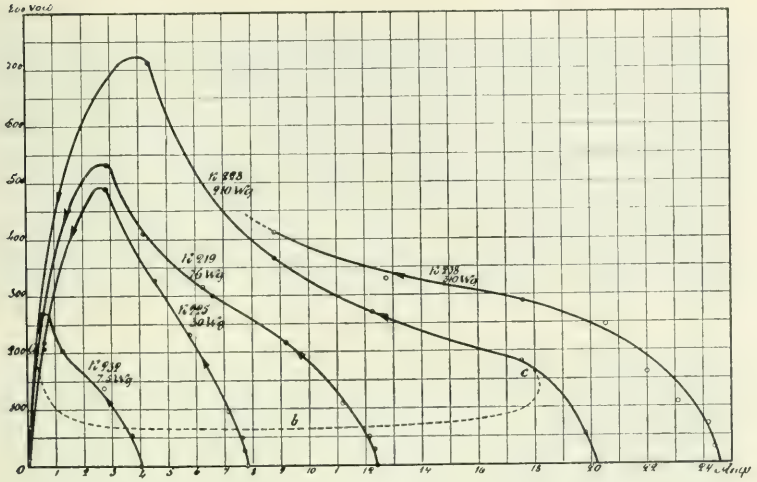

Fig. 16.
Spænding — Strøm — Karakteristiker for Gnister af forskellig Effekt.

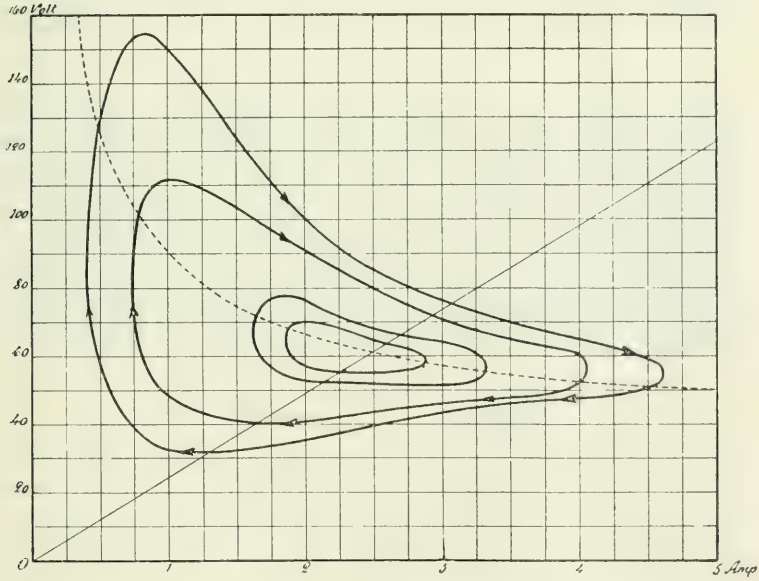

Fig. 17.
H. Th. Simons Buekarakteristiker reproducerede til Sammenligning med Gnistkarakteristikerne i Fig. 16.

Billeder af Strøm- og Spændingsoscillogrammet Nr. 238, der svarer til en Gnist med Effekten 310 Watt (50 Gnister pr. Sek.), og i Fig. 16 ses i Kurven mærket *K 238* den tilsvarende *e-i*-Karakteristik, d. v. s. den Del af den, som kunde bestemmes nogenlunde sikkert af Dobbeltoscillogrammet. I samme Figur er Karakteristikerne indtegnet for ialt 5 af de Gnister, hvis Strømkurver er gengivet ovenfor i Fig. 12. Man kan ikke undgaa at lægge Mærke til, at alle Kurver er af samme Type. I Fig. 17 er til Sammenligning gengivet et Sæt af de dynamiske Karakteristiker, H. Th. Simon har fundet for Duddell-Poulsen-Lysbuen ved Svingninger af første Art.* Man vil bemærke en paafaldende Lighed mellem Gnist og Buekarakteristikerne. Forskellen hidrører vistnok i Hovedsagen alene fra den Maade, hvorpaa Strømmen varierer i de to Tilfælde. Ved Duddellbuen pulserer Strømmen mellem en lavere og en højere Grænse eller udfører cykliske Variationer om en vis Gennemsnitsværdi. Ved Gnisten aftager den acyklisk fra en vis højere Værdi til Nul. Karakteristiken gennemløbes herved i den Retning Pilene antyder. Hvis Gnisten ikke gik ud, men Strømmen paa en eller anden Maade bragtes til at vokse op igen, naar for Eks. Punktet *a* paa 223-Kurven i Fig. 16 var naaet, vilde Spændingen følge en Kurve som *a b c*, og man vilde have en sluttet Kurve som i Simons Tilfælde.

Gnistkurven ved atmosfærisk Luft.

Saa længe Gnisten er enkelt, synes Gnistkurven i et Medium som Brint uafhængig af de fleste Forhold, for Eks. af Afbryderkantens Skarphed. Deler Gnisten sig op i to eller flere efter hinanden følgende Udladninger, bliver Gnistoscillogrammet uregelmæssigt, som vi har set, og breder sig

* Phys. Zeitschrift. 7, 444, 1906.

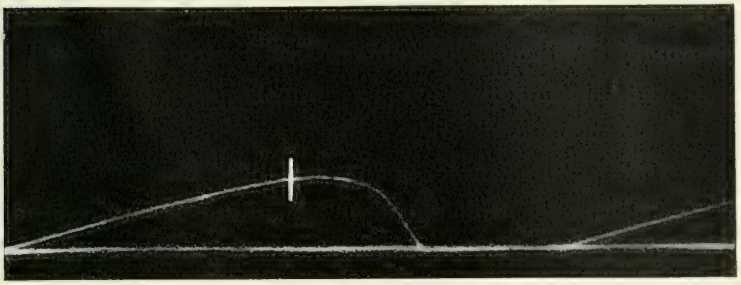

Fig. 18 *a*.

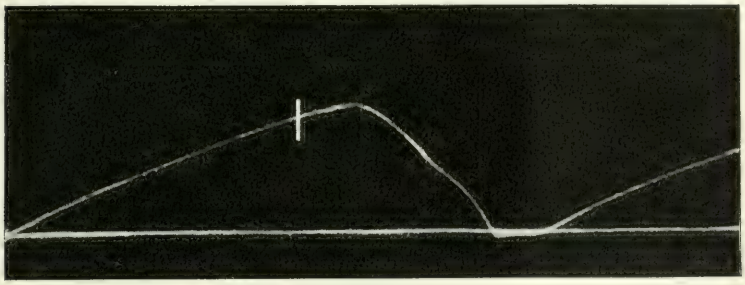

Fig. 18 *b*.

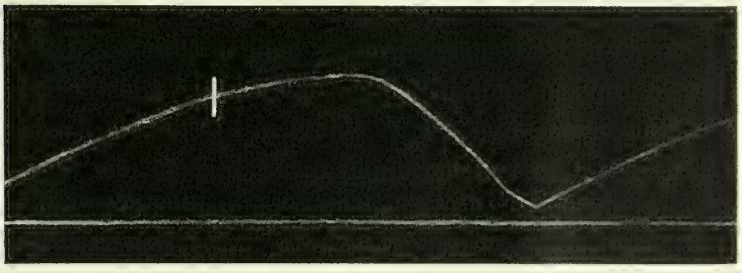

Fig. 18 *c*.

Oscillogrammer for Afbrydning af en induktiv Strømkreds i Luft. Gnisten begynder paa det afmærkede Sted af Kurven. Man vil bemærke, at Strømmen endnu vokser nogen Tid, efter at Gnisten er begyndt, paa Grund af Gnistens ringe Modstand. Karakteristisk er Gnistens Langvarighed i Forhold til Gnisten i Brint.

navnlig ud. Ethvert Forhold, som kan bevirke en Opdeling, for Eks. Fejl i Afbryderkanten, bidrager derfor til en Udbredelse af Gnistkurven, altsaa til at gøre Gnisten mere langvarig. Iøvrigt afhænger Gnistkurven for en usammensat

Gnist naturligvis af Karakteren af den Luftart, der fylder Rummet, i hvilket Afbrydningen finder Sted. Til Belysning heraf udførtes enkelte Forsøg i atmosfærisk Luft. Opstillingen var herved stadig den i Fig. 7 viste. Fig. 18*a*—*c* gengiver tre Oscillogrammer laante fra disse Forsøg.

Værdierne for Gnisteffekt og Spænding er anført i hosstaaende Tabel. Selvinduktionen var i alle Tilfælde 31.3 Millihenry.

Osc.	Fig.	W_g	E
		Watt	Volt
K 146	18 *a*	60	26.8
K 148	18 *b*	225	42.5
K 149	18 *c*	300	52.0

Gnisten svarende til Oscillogrammet K 148 kan, hvad Energiindholdet angaar, sammenlignes med Gnisten svarende til Oscillogrammet K 223 afbildet i Fig. 12. Men Gnisten i Luft varer 8 Gange saa længe som Gnisten i Gas. Varigheden var i det gengivne Forsøg ved den største Effekt saa stor, at Gnisten endnu ikke var ophørt, i det Øjeblik Kvægsølvstraalen paa ny — efter $^1/_{100}$ Sek. — sluttede Kredsen.

Det er interessant at sammenligne Gnisteffekten ved Gas og Luft. I Fig. 19 er to saadanne Sammenligninger udført. Gnisteffekten vokser ved Overgangen fra Gas til Luft, men den stiger ikke nær i samme Forhold som Gnistkurvens Bredde. Hvad der bringer den til at vokse, er sikkert alene den Omstændighed, at det i Kredsen indskudte Batteri, der frembringer den i Selvinduktionen opmagasinerede Energi, ved Luft bidrager væsentlig til Gnistens Energi, hvad der ikke er Tilfældet ved Gas. Det ligger atter i Gnistens ringe Modstand. (En stor Bredde betød en lille Værdi for Koefficienten b i Udtrykket for Gnistkurven, og en lille Værdi for b be-

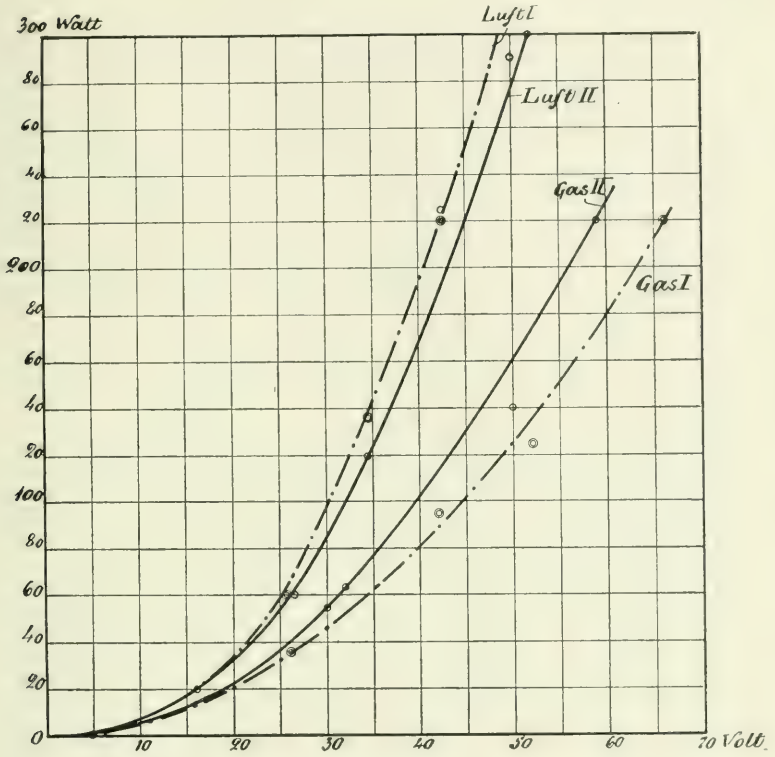

Fig. 19.
Gnisteffekten i Belysningsgas og Luft.

tød atter en lille Værdi for Koefficienten μ i Udtrykket $r_g = \mu l^2$ for Gnistens Modstand). Modstanden i Gnisten er faktisk til at begynde med saa ringe, at Strømmen i nogen Tid vedbliver at vokse, efter at den metalliske Kortslutning af Kredsen er ophørt, saaledes som det fremgaar af Fig. 18, hvor Øjeblikket for den metalliske Kortslutnings Afbrydning er afmærket.

Fuldstændigere Teori for Gniststrømmen.

De simple og konforme Resultater, der er fremstillede ovenfor, og særlig maaske den Omstændighed, at alle de betragtede Gnistkurver med god Tilnærmelse kunde afbildes ved et og samme Udtryk, synes afgjort at tale for, at den Modstand, Kredsen har rummet udenfor Gnistrummet, og den konstante elektromotoriske Kraft, som Kredsen som Regel har indeholdt, har været af ringe Indflydelse. Særlig Vægt har det maaske i denne Forbindelse, at Resultaterne mærkede Q og R i Fig. 13 passede ret godt ind i Kurven, tegnet ved Hjælp af de øvrige Resultater. Q- og R-Resultaterne hidrørte nemlig som anført fra Forsøg, ved hvilke Kredsen ingen væsentlig Spænding indeholdt i Afbrydningsøjeblikket, og ved hvilke Kredsens Modstand var ganske forsvindende. Yderligere bekræftedes Antagelsen om, at vi i Almindelighed og navnlig ved ikke for kraftige Gnister kunde se bort fra Modstand og elektromotorisk Kraft, af Tabellerne pag. 20 over Gnistens Modstand og Spændingsfald. Alligevel vilde det være af en vis Interesse at prøve Indflydelsen af Kredsens ydre Modstand r og dens konstante Spænding E noget nærmere. Et Forsøg herpaa er gengivet i det følgende.

Hvis Gnistens Modstand ligesom ovenfor sættes til μt^2, bliver Differentialligningen for Gniststrømmen:

$$(1) \qquad E - L \cdot \frac{di}{dt} = i \mu t^2 + i r$$

eller

$$(2) \qquad \frac{di}{dt} + \left(\frac{\mu}{L} t^2 + \frac{r}{L} \right) i - \frac{E}{L} = 0.$$

Integralet er

$$(3) \qquad i = e^{-\frac{\mu}{3L}t^3 - \frac{r}{L}t} \cdot \left[\bar{i} + \frac{E}{L}\int_0^t e^{\frac{\mu}{3L}t^3 + \frac{r}{L}t}\, dt\right],$$

hvor i betegner Begyndelsesværdien for Gniststrømmen.

Vi rækkeudvikler $e^{\frac{\mu}{3L}t^3 + \frac{r}{L}t}$, hvorved vi foreløbig nøjes med at medtage de to første Led, d. v. s. $1 + \frac{\mu}{3L}t^3 + \frac{r}{L}t$. Herved bliver Løsningen af Problemet

$$(4) \qquad i = e^{-\frac{\mu}{3L}t^3 - \frac{r}{L}t}\left[\bar{i} + \frac{E}{L}\left(t + \frac{\mu}{12L}\cdot t^4 + \frac{r}{2L}\cdot t^2\right)\right].$$

Vi anvender Teorien paa Oscillogram 162, der er vist i Fig. 20 *A*. L var $33.3 \cdot 10^{-3}$ Henry. Kredsens Modstand var 1.45 Ohm, E 61.5 Volt og i 14.3 Amp. Af Oscillogrammet findes $b = \mu/3L = 0.354 \cdot 10^9$. For Kurvepunktet med Abscissen 5, hvortil svarer $t = 5.10\ ^2/_{38} = 13.15 \cdot 10^{-4}$ Sek., bliver $\frac{E}{L}\cdot t = 2.42$, $\frac{\mu}{12L}t^4 = 0.203 \cdot t$, $\frac{r}{2L}\cdot t^2 = 0.0286\, t$. Af disse Tal sluttes, at det op til Abscissen 5 eller i ethvert Fald nær op derimod vil være tilladeligt at sætte

$$(5) \qquad i = e^{-\frac{\mu}{3L}t^3} \cdot e^{-\frac{r}{L}t}\left(i + \frac{E}{L}t\right).$$

Dersom E og r begge var Nul, vilde Strømmen være bestemt ved Udtrykket

$$(6) \qquad i' = e^{-\frac{\mu'}{3L}t^3} \cdot i,$$

hvor μ' er den Værdi for μ, der svarer til den formindskede Gnisteffekt. Spørgsmaalet er nu, med hvor stort et Beløb W_g vilde formindskes, dersom E og r var Nul. Den Del af Gnisteffekten, der skyldes E, er givet ved

$$(7) \qquad \Delta W_g = \int_0^{t_2} (E - i\,r)\, i\, dt,$$

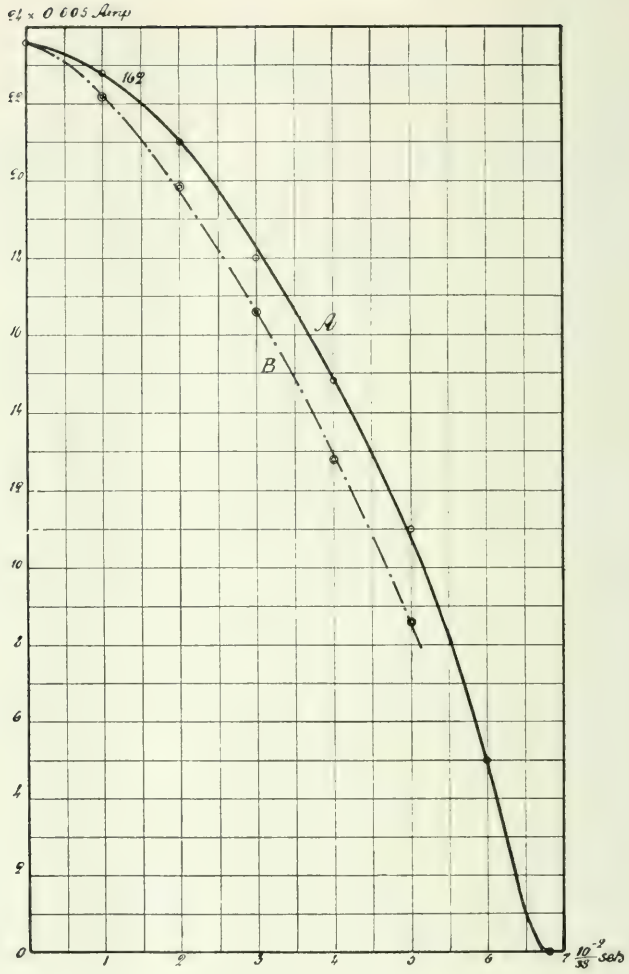

Fig. 20.

Indflydelsen af Kredsens Modstand r og af den konstante elektromotoriske Kraft E paa Oscillogrammet. A er det iagttagne Oscillogram, B det man vilde have faaet, hvis r og E havde været Nul. I det betragtede Tilfælde var Kredsens Selvinduktion $L = 33.3 \cdot 10^{-3}$ Henry, $r = 1.45$ Ohm, $E = 61.5$ Volt, Strømmens Begyndelsesværdi $i = 14.3$ Amp. og Gnisteffekten ved 50 Gnister pr. Sek. 215 Watt (direkte iagttaget).

hvor t_2 betyder Gnistens Varighed. $\int W_g$ kan findes ved grafisk Integration af Oscillogrammet og en Kurve over Variationen af $E - ir$ med t. Paa den Maade fandtes for

Oscillogrammet 162, Fig. 20 *A*, $W_y = 38$ Watt, medens W_y var 215 Watt. Den konstante Spænding E har altsaa i det betragtede Tilfælde sat Gnisteffekten $\frac{38}{215} \cdot 100 = 17.7\ \%$ op. Omvendt svarer $\frac{\mu'}{3L}$ til en 17.7 % formindsket Effekt og bliver derfor 17.7 % større end $\frac{\mu}{3L}$, idet μ ligesom b er omvendt proportional med den i Gnisten indeholdte Effekt. Af (5) og (6) faas nu for den reducerede Strøm i'

$$(8) \qquad i' = i \cdot e^{\frac{(\mu' - \mu)}{3L} t^3} \cdot e^{\frac{r}{L} t} \cdot \frac{i}{i + \frac{E}{L} t}.$$

I efterfølgende Tabel er en Række Talværdier for i'/i anført. De tilsvarende reducerede Strømme i' er indført i Fig. 20 og bestemmer Kurven *B*. Denne er af samme Type som den direkte iagttagne og giver en Forestilling om Indflydelsen af den konstante Spænding paa Gnistoscillogrammet. Undersøgelsen bekræfter, at denne Indflydelse er relativ ringe, selv ved en ret kraftig Gnist. Den gør sig stærkest gældende ved Gnister af stor Intensitet, fordi disse Gnisters Modstand er forholdsvis ringe. Vi har ovenfor behandlet Forsøgsresultaterne, der blev indvundne ved Opstillingen i Fig. 7, som om E og r var Nul. Det betyder, at vi har tillagt Gnistoscillogrammet en til en vis Grad falsk Ligning,

t	$e^{-\frac{\mu' - \mu}{3L} t^3}$	$e^{\frac{r}{L} t}$	$\frac{i}{i + \frac{E}{L} t}$	$i' : i$
Sek.				
$1 = 2.63 \cdot 10^{-4}$	0.999	1.010	0.966	0.976
$2 = 5.26$ —	0.991	1.023	0.935	0.949
$3 = 7.89$ —	0.970	1.034	0.910	0.914
$4 = 10.52$ —	0.930	1.047	0.884	0.861
$5 = 13.15$ —	0.868	1.058	0.862	0.798

nemlig den som tilkommer det reducerede Oscillogram. Imidlertid ses det, at det virkelige Oscillogram i det hele og store har samme Form som det reducerede. Det vil for b give en mindre Værdi end det reducerede. Til Gengæld tilskriver vi det en større Effekt, saaledes at det maa ventes, at Produktet $b\,W_g$ bliver nogenlunde det samme, som man vilde finde ved det reducerede Oscillogram. En Prøve herpaa blev udført ved Oscillogrammet 162. Herved fandtes for det direkte iagttagne Oscillogram: $W_g = 215$ Watt, $b = 0.354 \cdot 10^9$, $b\,W_g = 76 \cdot 10^9$, for det reducerede Oscillogram: $W_g' = W_g - \Delta W_g = 177$ Watt, $b' = 0.475 \cdot 10^9$, $b\,W_g = 84 \cdot 10^9$. Forskellen er 10 %, men det maa erindres, at der her er Tale om et Tilfælde, hvor E gør sig relativt stærkt gældende. At Talværdien for Produktet $b\,W_g$ afviger ret stærkt fra Værdien fundet ovenfor skyldes, som det senere viste sig, at Gnisten i Osc. 162 var begyndt at degenerere, d. v. s. dele sig op i flere Enkeltbuer.

Teori for multipel Kommutering.

De ovenfor fremstillede Erfaringer aabner Mulighed for teoretisk at behandle visse vigtige Kommuteringsproblemer. Et af disse angaar Overskæring af den strømførende Leder ved to eller flere isolerende Kanter, enten samtidig eller til hurtig paa hinanden følgende Tidspunkter. Fig. 21 antyder en saadan Overskæring. Vi betegner en Kommutering med saadan dobbel eller flerdobbel Overskæring som en multipel Kommutering. Først er i Fig. 21, tænker vi os, Gnisten *1* dannet, derefter, endnu inden *1* er slukket,

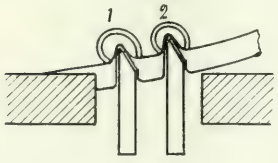

Fig. 21.
Multipel Kommutering. Først er Strømkredsen afbrudt ved *1*, derefter, endnu inden Gnisten ved *1* er slukket, ved 2. Der optræder da to Gnister, gennem hvilke Gniststrømmen passerer i Række.

Gnisten 2. Strømmen gaar da en Tid i Række gennem *1* og *2*.

Vi nøjes her med at betragte det Tilfælde, hvor de to Overskæringer finder Sted praktisk set samtidig. For Strømkredsen gælder da, naar man ser bort fra ydre Modstand og fra elektromotorisk Kraft, der ikke induceres i Kredsens Selvinduktion L:

$$(1) \qquad -L\cdot\frac{di}{dt} = 2r_g i = 2i\mu_2 t^2,$$

hvor r_g er Modstanden i hver enkelt Gnist givet ved $r_g = \mu_2 t^2$. Løsningen paa denne Ligning er

$$(2) \qquad i = i e^{-\frac{2\mu_2}{3L}t^3} = i e^{-2b_2 t^3},$$

idet i er Værdien af Strømmen til Tiden $t = 0$ d. v. s. ved Afbrydningens Begyndelse. Dersom W_g nu betyder den hele i L opmagasinerede Effekt, maa b_2 være bestemt ved

$$(3) \qquad b_2 = 265\cdot 10^9 \Big/ \left(\frac{W_g}{2}\right).$$

Ved en enkelt Overskæring vilde Strømmen være bleven

$$(4) \qquad i = \bar{i}\, e^{-b_1 t^3},$$

hvor

$$(5) \qquad b_1 = 265\cdot 10/W_g = \frac{b_2}{2}.$$

Udtrykket for Strømmen ved dobbelt Overskæring kan altsaa skrives

$$(6) \qquad i = \bar{i}\, e^{-4b_1 t^3},$$

der viser, at Strømmen falder af til sin halve Værdi i Løbet af en Tid, der er $\sqrt[3]{4} = 1.59$ Gange kortere end ved enkelt Overskæring. Strømoscillogrammets Bredde bliver altsaa $1/1.59 = 0.629$ Gange Bredden ved enkelt Overskæring.

Teori for en opdelt Gnist.

Ved uregelmæssig Overskæring af Straalen og ved større Gnisteffekter deler Gnisten sig op i to eller flere Udladninger. Denne Gnistens Opdeling ytrer sig, som vi har set, i en Udtværing af Gniststrømsoscillogrammet og i, at dette antager Trappeform med et Trin for hver ny Udladning. Det er ikke let at afgøre, om to eller flere af de successive Udladninger kan bestaa samtidig. Gaar vi ud fra, at det ikke sker, er det let at opstille en Teori for den opdelte Gnist, d. v. s. for Strømmen gennem den.*

Hvis den første Udladning sætter ind til Tiden $t = 0$ og varer til Tiden $t = t_1$, er Strømmen i dette Interval givet ved:

$$i = i_1 e^{-b_1 t^3}, \tag{1}$$

hvor

$$b_1 = 265 \cdot 10^9 / W_g, \tag{2}$$

og hvor atter

$$W_g = \frac{50}{2} \cdot \bar{i}_1^{\,2} L. \tag{3}$$

Hvis den næste Udladning varer fra $t = t_1$ til $t = t_2$, gælder for denne Tid

$$i = i_2 \cdot e^{-b_2 (t - t_1)^3}, \tag{4}$$

hvor i_2 er den Værdi, hvortil Gniststrømmen var aftaget til Tiden $t = t_1$ altsaa

$$i_2 = i_1 \cdot e^{-b_1 t_1^3}, \tag{5}$$

og hvor b_2 beregnes af i_2 paa samme Maade som b_1 beregnedes af i_1. En tredie Udladnings Strøm beregnes na-

* Det maa dog i denne Forbindelse bemærkes, at P. O. Pedersen har fundet, at to eller flere bueformede Udladninger under visse Omstændigheder kan bestaa samtidig. Sml. Vidensk. Selsk. Skrifter. Naturv. og Mathem. Afd. 8. Række. II, 4 pg. 253.

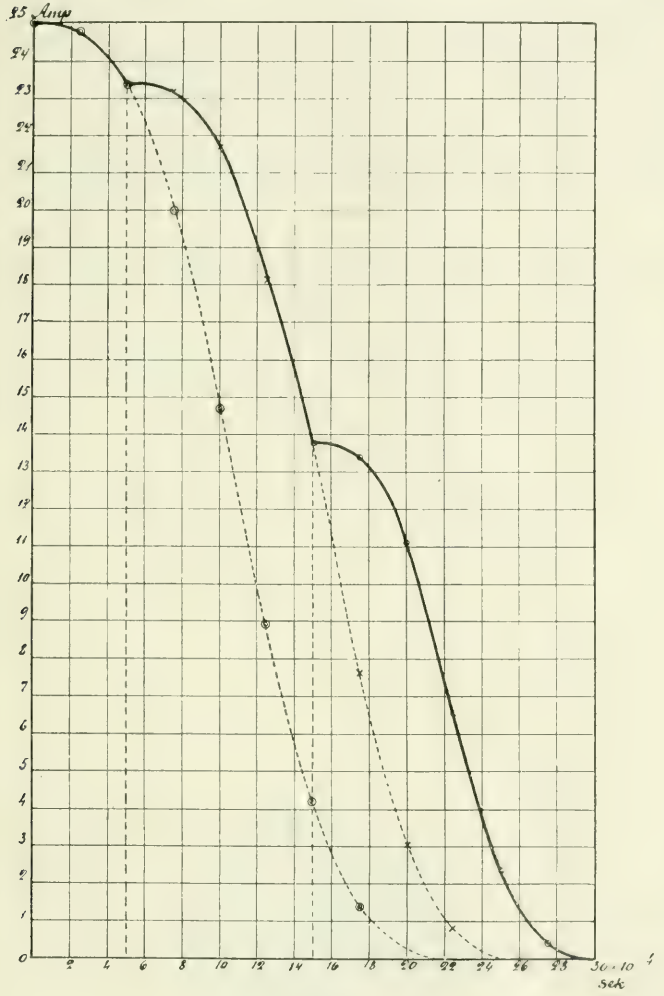

Fig. 22.

Gniststrømmen ved en opdelt Gnist. Til Tiden $5 \cdot 10^{-4}$ Sek. dannes en ny Udladning og den første afbrydes, til Tiden $15 \cdot 10^{-4}$ Sek. forsvinder den anden Udladning og erstattes af en tredie. $L = 32 \cdot 10^{-3}$ Henry, $i_1 = 25$ Amp.

turligvis analogt. I Fig. 22 er, til Belysning af Teorien, det beregnede Gniststrømsoscillogram gengivet for Tilfældet

$$i_1 = 25 \text{ Amp.}, \quad L = 32 \cdot 10^{-3} \text{ Henry}, \quad t_1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Sek.},$$
$$t_2 = 15 \cdot 10^{-4} \text{ Sek.}$$

Ved Punktering er antydet, hvorledes Kurverne vilde være forløbet, hvis en ny Udladning ikke var dannet. Ligheden med de iagttagne Gniststrømsoscillogrammer er, som det ses, udpræget, saaledes at der vel næppe kan være Tvivl om, at den opstillede Teori i Hovedsagen er rigtig.

Det foreliggende Arbejde er udført med Støtte fra Carlsbergfondet, hvis Direktion jeg hermed bringer min bedste Tak. Gnistfotografier og Oscillogrammer er optaget af Hr. Ingeniør, cand. polyt. E. Klenow. Jeg er Hr. Klenow taknemlig for den udmærkede Bistand, han har ydet mig.

Den polytekniske Læreanstalt: Fysisk Laboratorium II.
Juli 1923.

Færdig fra Trykkeriet d. 13. Marts 1924.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **V**, 11.

DIE DISSOZIATIONSKONSTANTE VON METHYLALKOHOL

VON

NIELS BJERRUM, AUGUSTA UNMACK
UND
LÁSZLÓ ZECHMEISTER

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1924

1. Übersicht.

Der elektrolytische Dissoziationsgrad von Methylalkohol ist bisher nicht ermittelt worden. Die klassischen Methoden von Arrhenius und Ostwald zur Bestimmung der Dissoziation des Wassers können indessen auch für Methylalkohol angewandt werden. Nach diesen Methoden ist die Dissoziationskonstante des Methylalkohols in der vorliegenden Arbeit zu $10^{-17,01}$ bei 18° bestimmt worden. Sie ist also etwa 500 mal kleiner als die Konstante des Wassers.

Die Dissoziation des Methylalkohols geschieht nach dem Schema:

$$CH_3OH \rightleftarrows CH_3O^- + H^+. \qquad (1)$$

Wird Natriummethylat mit methylalkoholischer Salzsäure gemischt, so verläuft eine, der Dissoziation nach (1) reziproke Reaktion, indem sich Methylat-Ionen CH_3O mit Wasserstoffionen zu Methylalkohol vereinigen. Aus dem augenblicklichen Verlauf dieses Neutralisationsprozesses darf man schliessen, dass das Dissoziationsgleichgewicht nach (1) sich sehr schnell einstellt. Aus der sehr geringen Leitfähigkeit von reinem Methylalkohol geht weiter hervor, dass die Dissoziation nur klein sein kann.

Eine Dissoziation nach dem Schema:

$$CH_3OH \rightleftarrows CH_3^+ + OH^- \qquad (2)$$

kommt neben (1) nicht in Betracht. Wir kennen überhaupt keine Lösungen mit nachweisbaren Mengen von positiven Me-

thylionen. Verbindungen wie Methylchlorid und Methylnitrat machen nicht Methylalkohol leitend, und selbst methylalkoholische Lösungen von starken Säuren enthalten nicht nachweisbare Mengen von Methylionen CH_3^+. Stellte sich eine, wenn auch sehr geringe, Dissoziation nach (2) mit messbarer Geschwindigkeit ein, so müssten Methyläther und Wasser gebildet werden, indem die nach (1) und (2) entstandenen Ionen sich vereinigen. Da aber erfahrungsgemäss Methyläther und Wasser in Methylalkohol bei gewöhnlicher Temperatur nicht gebildet werden, muss eine Dissoziation nach (2), wenn sie überhaupt stattfinden sollte, sehr langsam verlaufen. Unter den Umständen, wo eine nachweisbare Ätherbildung stattfindet, spielt vielleicht die Dissoziation nach (2) eine Rolle und kann zu einer Theorie für die Ätherbildung angewandt werden.

Durch die Messungen in dieser Arbeit ist gezeigt worden, dass die Dissoziation nach (1) zu einem wohl definierten Gleichgewicht führt. Den Dissoziationsgrad haben wir nach zwei verschiedenen Verfahren bestimmt, deren Ergebnisse gut übereinstimmen.

Am leichtesten berechnet man die Dissoziationskonstante des Methylalkohols aus der elektromotorischen Kraft eines Säure-Alkali-Elementes in ähnlicher Weise, wie Ostwald[1] und Arrhenius[2] 1893 die Dissoziationskonstante des Wassers aus elektrometrischen Messungen berechneten.

Es wurde gemessen die Spannungsdifferenz zwischen Wasserstoffelektroden in methylalkoholischer Salzsäure und in Natriummethylat, mit methylalkoholischem Natriumchlorid eingeschaltet:

[1] Zeitschr. f. physik. Chem. **11**, 521 (1893). Vgl. Ostwalds Handbuch d. allgem. Chemie II, 1, 907 (1892).

[2] Zeitschr. f. physik. Chem. **11**, 805 (1893).

$$H_2 \mid HCl \mid Na\,Cl \mid Na\,OCH_3 \mid H_2.$$

Haben alle drei Lösungen dieselbe Molarität, so lassen sich die Diffusionspotentiale leicht berechnen. Die Dissoziationskonstante (K_M) wurde nach folgender Formel berechnet:

$$-\log K_M = \frac{F \log e}{RT}(E + D) + \log [CH_3O^-] + \log [H^+] \quad (3)$$

(E = gemessenes Potential, D = Diffusionspotential).

In dieser Weise wurde gefunden:

Tabelle 1.

$-\log K_M$ (elektrometrisch)

	18°	25°	37°
In 0,1 molaren Lösungen . . .	16,50	16,29	(15,96)
In 0,01 — —	16,75	16,48	(16,06)
Extrapoliert zu Konz. 0	16,97	16,66	(16,15)

Die Änderung von K_M mit der Konzentration rührt davon her, dass in (3) mit Konzentrationen statt mit Aktivitäten gerechnet wurde. Wird K_M bis zur Konzentration Null extrapoliert, erhält man die wahre Dissoziationskonstante, K_M^0. Diese Extrapolation geschah in der Weise, dass die Änderung von log K_M der Kubikwurzel der Konzentration proportional gesetzt wurde.

Aus der Änderung von K_M mit der Temperatur kann man die Wärmetönung bei der Reaktion $CH_3O^- + H^+ = CH_3OH$ (in 0,1 molarer Lösung) zu ca. 12 000 Kal. berechnen. Dieser Wert liegt von der Neutralisationswärme in wässriger Lösung (13 700 Kal.) nicht weit entfernt.

Das zweite Verfahren, das zur Bestimmung der Dissoziationskonstante des Methylalkohols angewandt wurde, war das folgende.

Nach Arrhenius[1] lässt sich die Dissoziationskonstante

[1] Zeitschr. physik. Chem. **5**, 16 (1890).

des Wassers durch Messung des Hydrolysengrades eines Salzes bestimmen. Diese Methode wurde auf Methylalkohol übertragen.

Ein Salz wie Ammoniumazetat ist in Methylalkohol teilweise in Ammoniak und Essigsäure gespalten (alkoholysiert):

$$NH_4^+ + CH_3COO^- \rightleftarrows NH_3 + CH_3COOH \qquad (4)$$

Es seien: K_Λ die Gleichgewichtskonstante dieser Alkoholyse und K_{Ess} und K_{NH_3} die Dissoziationskonstanten von Essigsäure und Ammoniak. Nach Arrhenius gilt dann:

$$K_\Lambda \cdot K_{Ess} \cdot K_{NH_3} = K_M \qquad (5)$$

Aus der Alkoholysengleichung, und den Dissoziationsgleichungen der Säure und Base:

$$NH_4^+ + CH_3COO^- = NH_3 + CH_3COOH$$
$$CH_3COOH = CH_3COO^- + H^+$$
$$NH_3 + CH_3OH = NH_4^+ + CH_3O^-$$

erhält man nämlich durch Addition die Dissoziationsgleichung des Methylalkohols:

$$CH_3OH - CH_3O^- + H^+$$

Aus den entsprechenden Gleichgewichtskonstanten muss man dann auch durch Multiplikation die Dissoziationskonstante des Methylalkohols erhalten.

Die etwa 10%ige Alkoholyse des Ammoniumazetats wurde bestimmt durch Messung der Leitfähigkeitsvergrösserung des Salzes durch Zusatz von Essigsäure, bzw. Ammoniak. Da diese Stoffe hier keine merkbare Leitfähigkeit besitzen, wird die Vergrösserung der Leitfähigkeit allein durch die Zurückdrängung der Alkoholyse verursacht. Wir haben also ein interessantes Beispiel, wo diese Bredig'sche

Methode[1] sowohl durch Zusatz von Säure wie von Base ausgeführt werden kann.

Nach unseren Messungen kann man setzen:

$$-\log K_A = 1{,}48 + 1{,}80 \cdot \sqrt[3]{C} \text{ bei } 18°. \quad (6)$$

Dieser Ausdruck wurde aus den Versuchen mit Essigsäurezusatz berechnet. Die Messungen mit Ammoniakzusatz haben ein ähnliches, aber doch etwas abweichendes Resultat ergeben. Da diese Messungen indessen ein wenig dadurch beeinflusst sind, dass Kohlensäure nicht vollständig ferngehalten war, sind sie bei der Festlegung des definitiven Wertes nicht berücksichtigt worden.

Die Dissoziationskonstante des Ammoniaks nach

$$NH_3 + CH_3OH = NH_4^+ + CH_3O$$

haben wir durch Leitfähigkeitsmessungen bestimmt. Dadurch wurde gefunden:

$$-\log K^0_{NH_3} = 5{,}92 \quad \text{bei } 18°. \quad (7)$$

Die Dissoziationskonstante der Essigsäure wurde elektrometrisch bestimmt durch Messung der Spannungsdifferenz zwischen Wasserstoffelektroden in Salzsäure und in Mischungen von Essigsäure und Natriumazetat. In dieser Weise wurde gefunden:

$$-\log K_{Ess} = 9{,}65 - 1{,}77 \cdot \sqrt[3]{C} \text{ bei } 18°. \quad (8)$$

Aus K^0_A, $K^0_{NH_3}$ und K^0_{Ess} berechnet sich:

$$-\log K^0_M = 17{,}05 \quad (9)$$

in genügender Übereinstimmung mit dem elektrometrischen Wert 16,97.

[1] Zeitschr. physik. Chem. **13**, 214, 321 (1894). Die Methode ist neulich zur Bestimmung von Alkoholysen in Äthylalkohol von H. Goldschmidt angewandt worden. Zeitschr. physik. Chem. **99**, 116 (1921).

Diese Übereinstimmung bietet eine wertvolle Kontrolle der durch zwei ganz verschiedene Methoden erhaltenen Werte. Als wahrscheinlichster Mittelwert ergibt sich:

$$-\log K_M^0 = 17{,}01. \qquad (10)$$

Trotzdem 30 Jahre verlaufen sind, seitdem Arrhenius und Ostwald ihre Methoden zur Bestimmung der Dissoziationskonstante des Wassers entwickelten, sind dieselben merkwürdigerweise erst im letzten Jahre zur Bestimmung der Dissoziation von Alkoholen benutzt worden, als Hildebrand und Danner[1] zwei Arbeiten über die Ionisation des Äthylalkohols veröffentlichten. Als ihre Abhandlungen erschienen, waren die Vorarbeiten zu dieser Untersuchung bereits im Gange.

In ihrer ersten Arbeit suchten Hildebrand und Danner den Dissoziationsgrad des Alkohols durch Messung der Leitfähigkeit von reinem Alkohol zu bestimmen. Dieses Verfahren führte nicht zum Ziele. Es gelang nicht den Alkohol so rein herzustellen, dass seine Eigenleitfähigkeit gemessen werden konnte.

Dagegen gelang es Danner in einer zweiten Arbeit die Dissoziation elektrometrisch zu bestimmen. Er mass nicht direkt das Element:

$$H_2 \mid HCl \mid Na\,OC_2H_5 \mid H_2$$

weil er die Unsicherheit bei der Bestimmung des Diffusionspotentials fürchtete. Er berechnete vielmehr aus Messungen der drei folgenden Kombinationen:

$$H_2 \mid HCl, Hg\,Cl \mid Hg$$
$$Hg \mid Hg\,Cl, Na\,Cl \mid Na\text{-Amalgam}$$
$$Na\text{-Amalgam} \mid Na\,O\,C_2H_5 \mid H_2$$

[1] Journ. Amer. Chem. Soc. **44**, 2824, 2832 (1922).

die Spannung des Elementes

$$H_2 \mid HCl \parallel Na\,O\,C_2\,H_5 \mid H_2$$

Der Doppelstrich bedeutet, dass das Diffusionspotential eliminiert worden ist. In dieser Weise fand DANNER für die Dissoziationskonstante des Äthylalkohols, $K_{\ddot{A}}$:

$$-\log K_{\ddot{A}} = 19{,}14 \text{ bei } 18°. \qquad (11)$$

Der Vorteil des DANNER'schen Verfahrens erscheint uns recht problematisch. Die Annahmen, die er über die Aktivität der Ionen machen muss, um seine Berechnung durchzuführen, sind unserer Meinung nach unsicherer als die Berechnung der Diffusionspotentiale bei dem von uns gewählten Verfahren, und in experimenteller Beziehung ist seine Methode beschwerlicher.

2. Über das zur Formulierung der Ionengleichgewichte angewandte Verfahren.

In neueren Arbeiten über starke Elektrolyte wird gewöhnlich angenommen, dass diese Elektrolyte vollständig oder fast vollständig ionisiert sind. Die Abnahme der osmotischen Wirkung, der molaren Leitfähigkeit und des Aktivitätskoeffizienten (Verhältnis zwischen Aktivität und Konzentration), mit steigender Konzentration wird nicht wie früher als Folge unvollständiger Dissoziation, sondern als Folge der elektrischen Kräfte zwischen den Ionen erklärt.

In Übereinstimmung mit dieser Anschauung werden wir annehmen, dass Körper, wie Salzsäure, Natriummethylat, Natrium- und Ammoniumazetat in methylalkoholischer Lösung vollständig ionisiert sind (insofern sie nicht wie z. Beisp. Ammoniumazetat etwas alkoholysiert sind). In Methylalkohol nimmt zwar die molare Leitfähigkeit (μ) und

der Aktivitätskoeffizient (f) von Elektrolyten mit steigender Konzentration noch schneller ab als in Wasser. Da die Dielektrizitätskonstante des Methylalkohols bedeutend kleiner als die des Wassers (33 statt 80) ist, muss man aber auch erwarten, dass die elektrischen Kräfte hier grösser sind und sich kräftiger geltend machen werden.

Die Gesetze, nach welchen der Aktivitätskoeffizient und die Leitfähigkeit der Ionen sich mit der Konzentration auf Grund der interionischen Kräfte ändern, sind noch nicht vollständig bekannt. Formeln, die den Verlauf genau wiedergeben, werden sicher sehr kompliziert sein. Es hat sich indessen herausgestellt, dass man eine in den meisten Fällen brauchbare Interpolationsformel erhält, wenn man die Logarithmen des Aktivitätskoeffizienten (f) und der molaren Leitfähigkeit (μ) der Kubikwurzel der totalen Ionennormalität (C_{Ion}) proportional setzt[1]:

$$-\log f = k_f \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}} \qquad (12) \qquad -\log \mu = k_\mu \sqrt[3]{C_{Ion}} \qquad (13)$$

Die Proportionalitätskonstanten k_f und k_μ werden wir Aktivitätskonstante bzw. Leitfähigkeitskonstante nennen. Solche Formeln wurden von Bjerrum[2] für den Aktivitätskoeffizienten und von Ghosh[3] für die molare Leitfähigkeit vorgeschlagen. Die Werte der Proportionalitätskonstanten variieren etwas von Ion zu Ion. Sie sind angenähert dem Quadrat der Ionenvalenz proportional und der absoluten

[1] Sind mehrwertige Ionen vorhanden, so ist es besser, die Grösse Σcn^2 anzuwenden (c = molare Konzentration und n Valenz der verschiedenen Ionen). Vgl. Lewis und Randall Journ. Amer. Chem. Soc. **43**, 1140 (1921) sowie Debye und Hückel, Physik. Zeitschr. **24**, 185 (1923).

[2] Fysisk Tidsskrift (Kopenhagen) **15**, 59 (1916). Zeitschr. f. Elektrochem. **24**, 321 (1918).

[3] Journ. Chem. Soc. **113**, 449, 627, 707 (1918). Zeitschr. physik. Chem. **98**, 211 (1921).

Temperatur sowie der Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels umgekehrt proportional.

Es muss betont werden, dass (12) und (13) nur Interpolationsformeln mit beschränkter Gültigkeit sind. In stark verdünnten Lösungen ($C_{Ion} < 0{,}001$) scheint ein entsprechender Quadratwurzelausdruck besser zu stimmen[1], im Gebiet 0,1 bis 0,01 normal ist jedoch die Kubikwurzelformel weitaus vorzuziehen.

Wenn man statt mit Konzentrationen mit Aktivitäten rechnet, so gilt bekanntlich das Massenwirkungsgesetz exakt und zwar mit thermodynamischer Notwendigkeit. Wir werden die Aktivitäten in solchen Einheiten ausdrücken, dass sie bei unendlicher Verdünnung mit den Konzentrationen zusammenfallen und werden den Wert des entsprechenden Massenwirkungsausdruckes K^0 nennen.

Rechnet man mit Konzentrationen, so wird der Wert des Massenwirkungsausdruckes, den wir in diesem Falle mit K bezeichnen, etwas konzentrationsabhängig. Solange man bloss Gleichgewichte betrachtet, in welchen keine Ionen teilnehmen, ändert sich K jedoch nur wenig und hält sich selbst bei recht grossen Konzentrationen in der Nähe von K^0. Ganz anders liegen die Verhältnisse bei Ionengleichgewichten. Hier wird der Wert von K sich mit der Ionenkonzentration stark ändern. Bei abnehmender Ionenkonzentration nähert er sich K^0 und nimmt bei genügend kleiner Ionenkonzentration diesen Wert an.

Sind die Logarithmen der einzelnen Ionenaktivitätskoeffizienten der Kubikwurzel der Ionenkonzentration proportional, so wird auch die Differenz $\log K - \log K^0$ der

[1] Vgl. Brönsted: Journ. Amer. Chem. Soc. **44**, 938 (1922). Debye und Hückel: Physik. Zeitschr. **24**, 185 (1923).

Kubikwurzel der Ionenkonzentration proportional sein. Betrachten wir nämlich das Gleichgewicht,

$$M_1 + M_2 \cdots \rightleftarrows M_1' + M_2' \cdots$$

und nennen die Konzentrationen der Stoffe:

$$C_1, C_2 \cdots \quad C_1', C_2' \cdots$$

ihre Aktivitätskoefficienten:

$$f_1, f_2 \cdots \quad f_1', f_2' \cdots$$

und ihre Aktivitätskonstanten:

$$k_1, k_2 \cdots \quad k_1', k_2' \cdots$$

dann gilt:

$$\frac{C_1 \cdot C_2 \cdots}{C_1' \cdot C_2' \cdots} = K. \quad (14) \qquad \frac{C_1 f_1 \cdot C_2 f_2 \cdots}{C_1' f_1' \cdot C_2' f_2' \cdots} = K^0. \quad (15)$$

Aus (14) und (15) folgt:

$$\log K - \log K^0 = \log f_1 + \log f_2 \cdots - \log f_1' - \log f_2' \cdots \quad (16)$$

Werden nun Kubikwurzelformeln wie (12) eingeführt, so erhält man aus (16):

$$\log K^0 - \log K = (k_1 + k_2 \cdots - k_1' - k_2' \cdots) \sqrt[3]{C_{Ion}} \quad (17)$$

Die Grösse $k_1 + k_2 \cdots - k_1' - k_2' \cdots$ werden wir Aktivitätskonstante von K nennen und mit k bezeichnen. Sind von den Stoffen einige nicht Ionen, kann man für sie $f = 1$ und $k = 0$ setzen.

Hat man K bei verschiedenen Ionenkonzentrationen experimentell bestimmt und wünscht K^0 und k zu berechnen, kann man in folgender Weise vorgehen. Man zeichnet die Werte von log K mit der Kubikwurzel der Total-Ionenkonzentration als Abscisse in ein Diagramm ein und zieht eine Gerade durch die erhaltenen Punkte. Der Schnittpunkt dieser Linie mit der Ordinatenachse gibt $\log K^0$ und ihre Neigung k.

Mit Hilfe der zwei Konstanten K^0 und k lassen sich Messungen von Ionengleichgewichten mit einer ähnlichen Genauigkeit ausdrücken wie diejenige, mit welcher es möglich ist, Gleichgewichte zwischen Nicht-Elektrolyte mit Hilfe einer einzigen Massenwirkungskonstante auszudrücken[1].

Solange man für Nicht-Elektrolyte noch mit Konzentrationen statt mit Aktivitäten rechnet, kann es bei Berechnung von Elektrolytgleichgewichten nicht als nötig angesehen werden, Aktivitätsformeln zu benutzen, die komplizierter sind als die hier empfohlenen Kubikwurzelformeln.

Über die Genauigkeit, die man mit Kubikwurzelformeln erwarten darf, kann man sich orientieren, indem man untersucht, wie genau die experimentell bestimmten Punkte der $\log K\text{-}\sqrt[3]{C_{Ion}}$ Kurven auf einer Geraden liegen. Die Genauigkeit beträgt gewöhnlich einige Einheiten in der zweiten Dezimalstelle von log K.

Schwierig ist es hingegen zu beurteilen, mit welcher Genauigkeit man durch diese Formeln zu $\log K^0$ extrapolieren kann. In den meisten Fällen wird jedoch der eventuelle Fehler keine praktische Rolle spielen, da der extrapolierte Wert nur dazu benutzt wird, rückwärts Werte von log K für endliche Ionenkonzentrationen zu berechnen.

In Anbetracht der ziemlich geringen Präzision, mit welcher die meisten Messungen von Ionengleichgewichten ausgeführt worden sind, wird die mit den Kubikwurzelformeln erreichte Genauigkeit fast immer genügend sein. Nur bei besonderen

[1] Wegen Anwendungen von diesen Prinzipen, siehe z. B. Gjaldbæk u. Bjerrum, Aarsskrift for den kgl. Vet. og Landbohøjskole, Kopenhagen 1919, 64. Gjaldbæk. ebenda 1921, 245; Larsson, Zeitschr. f. allg. u. anorg. Ch. **125**, 281 (1922), Schreiner, ebenda **115**, 181 (1920); **122**, 201 (1922). Widmark, Acta medica scandinavica **55**, 415 (1920), Warburg, Biochem. Journ. **16**, 233 (1922); Faurholt, Kgl. Danske Vid. Selsk. Skr. Mat. Fys. Medd. **3**, Heft 20, 50—60 (1921), Brönsted, ebenda **2**, Heft 10 (1919). Journ. Amer. Chem. Soc. **43**, 2265 (1921).

Präzisionsmessungen (z. B. genauen Löslichkeitsbestimmungen) wird man mit Vorteil kompliziertere Formeln anwenden können.

Tabelle 2 enthält die von uns ermittelten k-Werte (Aktivitätskonstanten).

Tabelle 2.

Werte von Ionenaktivitätskonstanten (k) in Methylalkohol.

Temp.	18°	25°	37°
$k_{H^+} + k_{CH_3O^-}$	1,01	(0,74)	(0,41)
$k_{H^+} + k_{CH_3COO^-}$	1,77	1,97	2.28
$k_{NH_4^+} + k_{CH_3COO^-}$	1,80	—	—

3. Bestimmung der Dissoziationskonstante von Methylalkohol.

Es wurde das Potential von Ketten folgender Zusammensetzung gemessen:

$$H_2 \,|\, \underset{c_1 \text{ molar}}{HCl \text{ in } CH_3OH} \,|\, \underset{c_2 \text{ molar}}{NaCl \text{ in } CH_3OH} \,|\, \underset{c_3 \text{ molar}}{NaOCH_3 \text{ in } CH_3OH} \,|\, H_2$$

Die Konzentrationen c_1, c_2, c_3 wurden immer annähernd gleich gross gehalten.

Der angewandte Methylalkohol war mit Magnesium entwässert[1] und durch Destillation über Weinsäure von flüchtigen Basen befreit. Er enthielt weniger als 0,1‰ Wasser und seine spezifische Leitfähigkeit war kleiner als 10^{-6} recipr. Ohm. Bei seiner Aufbewahrung und Umgiessen wurde darauf geachtet, dass er nur mit getrockneter Luft in Berührung kam.

Der Alkohol wurde im Elektrodengefäss eingewogen und aus Mikroburetten mit der gewünschten Menge von Chlorwasserstoff oder Natriummethylat in Form von titrierten, etwa 1 oder 0,1 molaren methylalkoholischen Lösungen ver-

[1] Bjerrum und Zechmeister: Ber. d. deut. chem. Ges. **56**, 894 (1923).

setzt. Die Lösungen von Natriummethylat waren bei Abschluss von Kohlendioxyd und Feuchtigkeit ausgezeichnet haltbar. Dagegen verminderte sich der Titer der 1 molaren Chlorwasserstofflösung um etwa 1% pro Tag wegen Esterifikation. Eine 0,1 molare Lösung hielt sich viel besser: bei 18° änderte sie sich in 4 Tagen um ca. 1%; bei 37° war die Schwächung schon in 5 Stunden 1%. Die Stärke der Chlorwasserstofflösung wurde stets nach der endgültigen Potentialablesung durch Titrierung der Elektrodenlösung bestimmt.

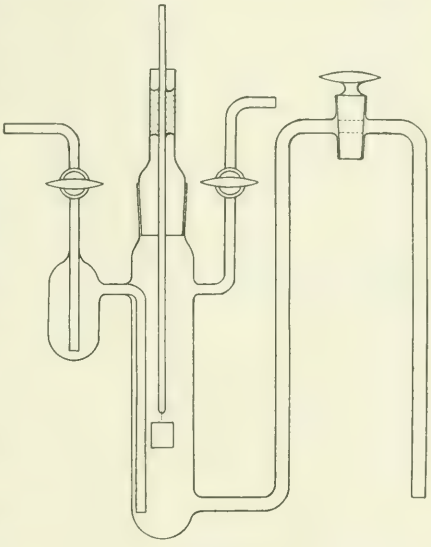

Fig. 1.

Wasserstoff wurde elektrolytisch aus Kalilauge unter Anwendung von Kupferkathoden und Nickelanoden entwickelt, mit alkalischer Pyrogallollösung gewaschen und mit Kalziumchlorid und Phosphorpentoxyd getrocknet.

Die Elektrodengefässe hatten die in Fig. 1 angegebene Form und waren in einem Wasserthermostat, auf 0,1° konstant, angebracht. Als Elektroden dienten platinierte Platinbleche. Die Potentialmessungen wurden mit einem Kompensationsapparat von Wolff und einem Spiegelgalvanometer von Siemens und Halske ausgeführt.

Tabelle 4 enthält die Messungsresultate. Die E-Werte der 5. Kolumne sind die direkt gemessenen Potentiale. In der

6. Kolumne (D) stehen die Summen der Diffusionspotentiale, berechnet nach der Formel:

$$D = \frac{RT}{F} \ln \frac{\mu_{HCl}}{\mu_{Na\,OCH_3}} \tag{20}$$

Hier ist μ_{HCl} die molare Leitfähigkeit von Chlorwasserstoff und μ_{NaOCH_3} die von Natriummethylat.

Zwischen gleich konzentrierten Lösungen von HCl und NaCl hat das Diffusionspotential die folgende Grösse:

$$D_1 = \frac{RT}{F} \ln \frac{\mu_{HCl}}{\mu_{NaCl}} \tag{21}$$

Zwischen gleich konzentrierten Lösungen von NaCl und $NaOCH_3$ beträgt es:

$$D_2 = \frac{RT}{F} \ln \frac{\mu_{NaCl}}{\mu_{NaOCH_3}} \tag{22}$$

Daraus erhält man:

$$D = D_1 + D_2 = \frac{RT}{F} \ln \frac{\mu_{HCl}}{\mu_{NaOCH_3}} \tag{23}$$

Die für (20) notwendigen Leitfähigkeitswerte wurden nach den folgenden Formeln berechnet:

$$-\log \mu_{HCl} = 2{,}286 - 0{,}55 \cdot \sqrt[3]{C} \tag{24}$$

$$-\log \mu_{NaOCH_3} = 1{,}955 - 0{,}53 \cdot \sqrt[3]{C} \tag{25}$$

In Tabelle 3 sind die beobachteten mit den nach diesen Formeln berechneten Werten zusammengestellt:

Tabelle 3.

Molare Leitfähigkeiten in Methylalkohol bei 18°.

Stoff	C(Mol/L)	beob.	ber.
HCl	0,00185	165,7	165,2
	0,00971	146	147,6
	0,0103	147,3	146,6

	C (Mol/L)	beob.	ber.
HCl	0,0131	143,6	143,2
	0,0484	122	121,9
	0,0936	109,1	109,0
$NaOCH_3$	0,00111	79,3	79,5
	0,00788	71,1	70,8
	0,0102	69,6	69,1
	0,0510	57,0	57,4
	0,0864	53,0	52,5

Es wurde angenommen, dass bei 25° und 37° das Verhältnis der Leitfähigkeiten dasselbe ist wie bei 18°.

In der letzten Kolumne der Tabelle 4 stehen die Werte von $-\log K_M$, dem Dissoziationsexponenten des Methylalkohols, berechnet nach folgender Formel:

$$-\log K_M = \frac{F \cdot 0{,}4343}{RT}(E + D) - \log c_1 - \log c_3. \qquad (26)$$

Tabelle 4.

H_2	HCl in CH_3OH c_1 mol.	NaCl in CH_3OH c_2 mol.	$NaOCH_3$ in CH_3OH c_3 mol.	H_2

Temp.	c_1	c_2	c_3	E	D	$-\log K_M$
18	0,0100	0,0100	0,0100	0,7184	0,0175	16,746
25	0,0100	0,0100	0,0100	0,7203	0,0179	16,485
37	0,0100	0,0100	0,0100	0,7232	0,0186	16,060
18	0,0970	ca. 0,100	0,0972	0,8145	0,0209	16,495
25	0,0961	- 0,100	0,0973	0,8219	0,0214	16,291
37	0,0958	- 0,100	0,0971	0,8343	0,0223	15,958

Die Werte von $-\log K_M$ können durch folgende Kubikwurzelformeln wiedergegeben werden:

$$-\log K_M = 16{,}963 - 1{,}01 \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}} \text{ bei } 18° \qquad (27)$$

$$-\log K_M = 16{,}644 - 0{,}74 \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}} \text{ bei } 25° \qquad (28)$$

$$-\log K_M = 16{,}148 - 0{,}41 \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}} \text{ bei } 37° \qquad (29)$$

Die Grösse $-\log K_M^0$ (Dissoziationsexponent bei unendlicher Verdünnung) und die entsprechende Aktivitätskonstante k haben somit die folgenden Werte:

Tabelle 5.

	18°	25°	37°
$-\log K_M^0$	16,963	16,644	16,148
$k = k_{H^+} + k_{CH_3O^-}$	1,01	(0,74)	(0,41)

Die Verminderung der k-Werte mit steigender Temperatur rührt vielleicht nur davon her, dass die Messungen in 0,01 molaren Lösungen bei höheren Temperaturen ziemlich unsicher sind. Diese k-Werte sind nur mit Vorsicht anzunehmen und sind deshalb eingeklammert.

Der k-Wert bei 18° ist recht plausibel. Für Wasser ist bei 18° die entsprechende Konstante zu 0,4 gefunden worden[1]. Diese k-Werte verhalten sich annähernd umgekehrt wie die Dielektrizitätskonstanten (1,01/0,4, bzw. 80/33).

Aus der Variation von $-\log K_M$ mit der Temperatur kann man die Neutralisationswärme von starken Säuren und stark dissoziierten Methylaten in Methylalkohol mit Hilfe der Formel

$$Q = 4{,}57 \cdot T^2 \cdot \frac{d \log K}{dT} \qquad (30)$$

berechnen.

Tabelle 6.

Wärmeentwickelung bei der Reaktion $H^+ + CH_3O^- = CH_3OH$

	18°—25°	25°—37°
0,1 molar	11540 cal.	11710 cal.
0,01 molar	14760 -	14940 -

[1] Unveröffentlichte Messung von Augusta Unmack.

Die Änderung der berechneten Wärmeentwickelung mit der Konzentration ist kaum reell, sondern eher durch die Ungenauigkeit der Potentialmessungen in 0,01 molarer Lösung bei höheren Temperaturen verursacht. Aus den Messungen in 0,1 molaren Lösungen berechnet sich als Mittelwert 11640 Kalorien.

In Wasser ist die Neutralisationswärme bekanntlich etwas grösser (ca. 13700 kal.).

4. Die Dissoziationskonstante von Ammoniak in Methylalkohol.

Ammoniak macht Methylalkohol leitend, indem es sich damit zu den Ionen CH_3O^- + NH_4^+ verbindet. Als Dissoziationskonstante von Ammoniak in Methylalkohol werden wir die folgende Grösse bezeichnen

$$K_{NH_3} = \frac{[NH_4^+] \cdot [CH_3O^-]}{[NH_3]} \qquad (31)$$

Der Wert dieser Konstante wurde durch Leitfähigkeitsbestimmungen festgelegt.

Für diese Bestimmungen wurde Methylalkohol zuerst wie auf Seite 14 angegeben gereinigt, und dann mit einem trocknen, kohlendioxydfreien Luftstrom von Kohlendioxyd vollständig befreit. Das Wegblasen des Kohlendioxyds ist für die Messung von entscheidender Bedeutung. Bei Vorversuchen ohne diese Vorsichtsmassregel variierte die berechnete Dissoziationskonstante mit der Ammoniakkonzentration stark und ergab zu hohe Werte.

Die Leitfähigkeiten wurden nach dem Kohlrausch'schen Verfahren gemessen unter Anwendung einer kalibrierten Walzenbrücke von Hartmann und Braun. Es wurden zwei Messungsreihen ausgeführt, deren Resultate Tabelle 8 enthält (c = mol. Konz., μ = molare Leitfähigkeit).

Um aus der gefundenen molaren Leitfähigkeit den Dissoziationsgrad zu berechnen, muss man mit der Leitfähigkeit des vollständig dissoziierten Ammoniummethylates dividieren. Diese Grösse $\mu_{NH_4OCH_3}$ wurde nach dem Kohlrausch'schen Gesetz der unabhängigen Wanderung von Ionen aus der Leitfähigkeit von Ammoniumchlorid, Natriummethylat und Natriumchlorid nach der folgenden Formel berechnet:

$$\mu_{NH_4OCH_3} = \mu_{NH_4Cl} + \mu_{NaOCH_3} - \mu_{NaCl} \qquad (32)$$

Für die molaren Leitfähigkeiten dieser Stoffe bei 18° wurden folgende Formeln angewandt:

$$\log \mu_{NH_4Cl} = 2{,}078 - 0{,}70 \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}} \qquad (33)$$

$$\log \mu_{NaOCH_3} = 1{,}955 - 0{,}53 \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}} \qquad (34)$$

$$\log \mu_{NaCl} = 1{,}955 - 0{,}66 \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}} \qquad (35)$$

Die Formel für Natriummethylat wurde schon auf Seite 11 mit Versuchsdaten belegt. Die Daten, auf welche die zwei anderen Formeln sich stützen, sind in Tabelle 7 gegeben.

Tabelle 7.

Molare Leitfähigkeiten in Methylalkohol bei 18°.

	c	μ
NH_4Cl	0,0418	68,4
	0,0823	59,4
NaCl	0,0101	71,2
	0,0427	58,1

Nach (32) berechnet sich die molare Leitfähigkeit von NH_4OCH_3 bei $C_{Ion} = 0$ zu 109,7 und bei $C_{Ion} = 0{,}001$ zu 96,0. Daraus folgt für die Leitfähigkeit des vollständig dissoziierten Ammoniummethylates:

$$\log \mu_{NH_4OCH_3} = 2{,}040 - 0{,}58 \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}} \qquad (36)$$

Um $\mu_{NH_4OCH_3}$ nach Formel (36) zu ermitteln, ist für C_{Ion} die Ionenkonzentration in der Ammoniaklösung zu setzen. Mit genügender Genauigkeit kann man sie nach folgender Formel berechnen:

$$C_{Ion} = c \cdot \frac{\mu}{100} \qquad (37)$$

Tabelle 8.

Leitfähigkeit von Ammoniak in Methylalkohol bei 18°.

1. Versuchsreihe.

c	μ	$C_{Ion}\left(= c\frac{\mu}{100}\right)$	$\mu_{NH_4OCH_3}$	γ	$-\log K_{NH_3}$	$-\log K^0_{NH_3}$
0,00903	1,20	0,000109	103,0	0,0116	5,907	5,964
0,0439	0,57	0,00025	100,9	0,0057	5,848	5,921
0,0787	0,44	0,00035	99,8	0,0044	5,812	5,896
0,534	0,155	0,00083	96,8	0,0016	5,863	5,976
					Mittel	5,939

2. Versuchsreihe.

0,00886	1,27	0,000113	102,8	0,0125	5,853	5,911
0,0431	0,60	0,00026	100,1	0,0060	5,807	5,884
0,0773	0,45	0,00035	99,8	0,0045	5,807	5,891
1,306	0,089	0,00116	95,3	0,0009	5,976	(6,102)
					Mittel	5,895

In Kolumne 4 Tabelle 8 stehen die so berechneten Werte von $\mu_{NH_4OCH_3}$. Mit ihrer Hilfe sind die in Kolumne 5 und 6 aufgeführten Werte von Dissoziationsgrad (γ) und Dissoziationsexponent ($-\log K_{NH_3}$) berechnet.

$$\gamma = \frac{\mu}{\mu_{NH_4OCH_3}} \qquad (38); \qquad -\log K_{NH_3} = -\log \frac{c\gamma^2}{1-\gamma} \qquad (39)$$

Die Werte von $-\log K_{NH_3}$ sind etwas konzentrationsabhängig. Um aus den gefundenen Werten auf $-\log K^0_{NH_3}$ (den Wert von $-\log K_{NH_3}$ bei der Konzentration Null) zu

extrapolieren, ist für die Summe der Aktivitätskonstanten des Ammoniumions und des Methylations in Methylalkohol 1,2 gesetzt.

Hierbei ist für die Aktivitätskonstante der einwertigen Ionen NH_4^+ und CH_3O^- in Methylalkohol 0,6 angenommen. Da die Extrapolation nur klein ist, hat es wenig Bedeutung, ob man einen etwas höheren oder niedrigeren Wert benutzt.

Da weiter $C_{Ion} = c \cdot \gamma$, folgt:

$$-\log K^0_{NH_3} = -\log K_{NH_3} + 1{,}2 \cdot \sqrt[3]{c \cdot \gamma}. \qquad (41)$$

Als Mittelwerte von $-\log K^0_{NH_3}$ fanden wir in zwei Versuchsreihen 5,939 und 5,895[1], also im Mittel:

$$-\log K^0_{NH_3} = 5{,}917 \text{ in } CH_3OH \text{ bei } 18°. \qquad (42)$$

Hätte man mit Aktivitätskonstanten 1 statt 0,6 gerechnet, so würde man 5,960 gefunden haben.

5. Die Dissoziationskonstante von Essigsäure in Methylalkohol.

Essigsäure ist in Methylalkohol eine so schwache Säure, dass es schwierig ist, ihre Dissoziationskonstante durch Leitfähigkeitsmessungen zu bestimmen. Die durch die Verunreinigungen des Methylalkohols verursachte Leitfähigkeit ist von derselben Grössenordnung wie die Leitfähigkeit der zugefügten Essigsäure. In der folgenden Tabelle 9 sind die Resultate einiger Leitfähigkeitsmessungen zusammengestellt.

Tabelle 9.

Leitfähigkeit von Essigsäure in Methylalkohol bei 18°.

c	$\varkappa$	μ	$-\log K_{Ess}$
0,00984	$0{,}78 \cdot 10^{-6}$	0,044	9,32
0,0102	$0{,}99 \cdot 10^{-6}$	0,063	8,99

[1] Hierbei ist der etwas abweichende Wert bei der grössten Ammoniakkonzentration nicht berücksichtigt.

c	$\varkappa$	μ	$-\log K_{Ess}$
0,0485	$2{,}11 \cdot 10^{-6}$	0,036	8,80
0,0908	$3{,}39 \cdot 10^{-6}$	0,033	8,61
0,900		0,0195	8,07
2,945		0,0075	8,38

Bei der Umrechnung der spezifischen Leitfähigkeit ($\varkappa$) auf molare (μ) wurde die Eigenleitfähigkeit des Methylalkohols ($0{,}35 \cdot 10^{-6}$) abgezogen. Die Zahlen für die zwei konzentrierten Lösungen sind einer älteren Arbeit von K. Hertwig[1] entnommen. Die dort gegebenen Zahlen sind auf die jetzt gebräuchlichen Einheiten umgerechnet.

Die in der letzten Kolumne angeführten Werte für den Dissoziationsexponenten der Essigsäure $-\log K_{Ess}$ sind unter der Annahme berechnet, dass die Leitfähigkeit einer vollständig dissoziierten Essigsäure 200 ist, was annäherungsweise zutrifft. Die Zahlen zeigen durch allzu starke Abnahme mit steigender Konzentration ihre Unzuverlässigkeit an. Der wahre Wert des Dissoziationsexponenten liegt nach unseren elektrometrischen Versuchen bei den obigen Ionenkonzentrationen zwischen 9,50 und 9,45.

Die Dissoziationskonstante der Essigsäure in Methylalkohol wurde dagegen mit gutem Resultat nach einer elektrometrischen Methode bestimmt. Es wurde das Potential von Wasserstoffelektroden in Mischungen von Essigsäure und Natriumazetat gemessen.

Die untersuchten Ketten hatten die folgende Zusammensetzung:

$$H_2 \,|\, \begin{matrix} c_1 \text{ molarer } CH_3COOH \\ c_2 \text{ molarer } CH_3COONa \\ \text{in } CH_3OH \end{matrix} \,|\, \begin{matrix} c_3 \text{ molarer NaCl} \\ \text{in } CH_3OH \end{matrix} \,|\, \begin{matrix} c_4 \text{ molarer HCl} \\ \text{in } CH_3OH \end{matrix} \,|\, H_2$$

[1] Wied. Ann. **43**, 840 (1891).

Die Konzentrationen c_2, c_3 und c_4 (übrigens auch c_1) wurden immer annähernd gleich gross gehalten, um leicht die Diffusionspotentiale berechnen zu können. Die Messungen wurden mit etwa 0,1 und 0,01 molaren Lösungen bei 18°, 25° und 37° ausgeführt.

Die Mischungen von Essigsäure und Natriumazetat wurden aus einer Lösung von Essigsäure hergestellt, die mit der Hälfte der zur Neutralisation notwendigen Natriummethylatlösung versetzt wurde. Die in der Wasserstoffelektrode vorhandene Chlorwasserstofflösung wurde nach Ausführung der Potentialmessung titriert.

Die Resultate sind in Tabelle 10 zusammengestellt:

Tabelle 10.

Temp.	c_1	c_2	c_3	c_4	E	D	$-\log K_{Ess}$
18	0,1	0,1	0,1	0,098	0,4407	0,0110	8,83
25	0,1	0,1	0,1	0,0966	0,4452	0,0113	8,74
37	0,1	0,1	0,1	0,0926	0,4536	0,0117	8,60
18	0,01	0,01	0,01	0,00956	0,4052	0,0130	9,27
25	0,01	0,01	0,01	0,00976	0,4080	0,0134	9,23
37	0,01	0,01	0,01	0,00859	0,5228	0,0139	9,17

In den 5 ersten Kolumnen sind die Temperaturen und die Konzentrationen von Essigsäure (c_1), Natriumazetat (c_2), Natriumchlorid (c_3), Salzsäure (c_4) angeführt; dann kommen in der 6. Kolumne (E) die gemessenen Potentialwerte und in der 7. (D) die Summen der beiden Diffusionspotentiale. Die Diffusionspotentiale wurden, ähnlich wie auf S. 16 beschrieben, berechnet nach:

$$D = \frac{RT}{F} \ln \frac{\mu_{HCl}}{\mu_{NaCH_3COO}} \qquad (43)$$

Die Leitfähigkeitswerte wurden nach den folgenden Formeln ermittelt:

$$\log \mu_{HCl} = 2{,}286 - 0{,}55 \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}} \qquad (44)$$

$$\log \mu_{NaCH_3COO} = 1{,}961 - 0{,}91 \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}} \qquad (45)$$

Kolumne 8 enthält die Werte des Dissoziationsexponenten der Essigsäure ($\log K_{Ess}$), berechnet nach der Formel:

$$-\log K_{Ess} = \frac{F \cdot 0{,}4343}{RT} (E + D) - \log \frac{c_4 \cdot c_2}{c_1}. \qquad (46)$$

Will man die Konzentrationsabhängigkeit von $-\log K_{Ess}$ durch Kubikwurzelformeln wiedergeben, kommt man zu folgenden Ausdrücken:

$$-\log K_{Ess} = 9{,}65 - 1{,}77 \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}} \text{ bei } 18°. \qquad (47)$$

$$-\log K_{Ess} = 9{,}65 - 1{,}97 \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}} \text{ bei } 25°. \qquad (48)$$

$$-\log K_{Ess} = 9{,}66 - 2{,}28 \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}} \text{ bei } 37°. \qquad (49)$$

Es bedeutet hier C_{Ion} die Ionenkonzentration. Sie wurde bei den Versuchen zu 0,1, bzw. 0,01 gesetzt, was für die Salzsäure nur annäherungsweise zutraf. Die Potentialmessungen sind aber besonders bei 37° nicht so genau, dass es sich lohnen würde, genauer zu rechnen.

Für $-\log K^0_{Ess}$ (den auf Ionenkonzentration Null extrapolierten Dissoziationsexponenten der Essigsäure) gilt deshalb:

t	18°	25°	37°
$-\log K^0_{Ess}$	9,65	9,65	9,66

und für die Summe der Aktivitätskonstanten des Wasserstoffions und des Azetations:

t	18°	25°	37°
$k = k_{H^+} + k_{CH_3COO^-}$	1,77	1,97	2,28

Für Essigsäure in Wasser ist $-\log K^0_{Ess}$ gleich 4,75. Essigsäure ist also in Methylalkohol etwa 9000 mal schwächer als in Wasser.

6. Die Alkoholyse von Ammoniumazetat in Methylalkohol.

Misst man die Leitfähigkeit einer Lösung von Ammoniumazetat in Methylalkohol vor und nach Zusatz von Essigsäure (oder Ammoniak), findet man, dass die Leitfähigkeit des Azetates durch den Zusatz zugenommen hat. Da die Leitfähigkeit von Essigsäure (und Ammoniak) unter den vorliegenden Umständen verschwindend klein ist, so muss man die Zunahme der Leitfähigkeit als eine Folge der Zurückdrängung der Alkoholyse beim Zusatz einer der Alkoholysenprodukte betrachten.

Ammoniumazetat ist in methylalkoholischer Lösung etwas alkoholysiert nach der Gleichung:

$$NH_4^+ + CH_3COO^- = NH_3 + CH_3COOH.$$

Ein Zusatz von Essigsäure (oder von Ammoniak) wird diese Spaltung zurückdrängen, und somit die Menge der Ionen und die Leitfähigkeit vergrössern. Aus der Vergrösserung kann man den Grad der Alkoholyse bestimmen.

Bei der Ausführung der Messungen wurde etwa 35 cm^3 Methylalkohol in ein flaschenförmiges Widerstandsgefäss eingewogen und mit Essigsäure und Ammoniak (in Form von 1 oder 0,1 normalen Lösungen in Methylalkohol) versetzt. Diese Lösungen wurden aus Mikrobüretten zugesetzt, die 2 cm^3 fassten, in 0,02 cm^3 geteilt waren und ein angeschmolzenes Vorratsgefäss besassen. Die Konzentration von Ammoniumazetat wurde so nicht viel genauer als auf 1 % festgelegt. Wichtig ist aber, dass die beim Zusatz von Essigsäure oder von Ammoniak zu einer schon dargestellten Lösung von Ammoniumazetat eintretenden Leitfähigkeitsänderungen trotzdem auf 1 ‰ ausgewerthet werden können, weil die durch den Zusatz eingetretene, relative Verminderung der Salzkonzentration weit genauer als die absolute Salzkonzentration bekannt ist.

In Tabelle 11 und 12 sind die Messungsresultate zusammengestellt.

Tabelle 11.

Leitfähigkeit von Ammoniumazetat in Methylalkohol bei 18°, ohne und mit Zusatz von Essigsäure.

Nr.	CH_3COONH_4 Mol/L	CH_3COOH Mol/L	$\varkappa$	μ	$\varkappa'$	μ'
1	0,00904		0,000586	64,8		
1 a	0,00825	0,0784	597	72,4	0,000599	72,6
2	0,0500		0,00246	49,2		
2 a	0,0473	0,0480	251	53,1	0,00252	53,2
3	0,1004		4031	40,2		
3 a	0,0978	0,0234	4103	42,0	0,004107	42,0
3 b	0,0953	0,0461	4036	42,4	4044	42,5
3 c	0,0913	0,0817	3926	43,0	3940	43,1
3 d	0,0890	0,500	3755	42,2	3838	43,1

Tabelle 12.

Leitfähigkeit von Ammoniumazetat in Methylalkohol bei 18°, ohne und mit Zusatz von Ammoniak.

Nr.	CH_3COONH_4 Mol/L	NH_3 Mol/L	$\varkappa$	μ
4	0,00971		0,000621	64,0
4 a	0,00960	0,00979	681	71,0
4 b	0,00888	0,0754	650	73,2
5	0,0893		0,00372	41,7
5 a	0,0870	0,0226	379	43,6
5 b	0,0840	0,0446	374	44,2
5 c	0,0803	0,0881	361	45,0

Die Numerierung der Versuche ist in der Weise geschehen, dass z. B. 3 a, 3 b, 3 c, 3 d Versuche bezeichnen, in welchen zu der in Versuch 3 gemessenen Salzlösung Essigsäure nach und nach zugesetzt wurde. $\varkappa$ ist die spezifische Leitfähig-

keit in reziproken Ohm; μ die daraus berechnete molare Leitfähigkeit für Ammoniumazetat; $\varkappa'$ und μ' sind die Leitfähigkeiten, korrigiert für die durch Zusatz der Essigsäure hervorgerufene Viskositätsänderung. Diese Korrektion ist besonders von Bedeutung bei Versuch 3 d, wo die Essigsäure 0,5 molar ist.

Durch einen Versuch wurde gefunden, dass die innere Reibung in 1,07 molarer methylalkoholischer Essigsäure bei 18° 4,7 % grösser als in reinem Methylalkohol war; bei der Berechnung der Korrektion haben wir angenommen, dass die Viskositätsänderung der Essigsäurekonzentration proportional gesetzt werden kann.

Die in der 5. Kolumne der Tabellen 11 und 12 stehenden molaren Leitfähigkeiten zeigen deutliche Steigerungen bei Zusatz von Essigsäure und von Ammoniak.

Mit Annäherung kann man als Mass der Alkoholyse das Verhältnis zwichen der maximalen Vergrösserung von μ und dem Maximumswert von μ setzen.

Genauer, wenn auch beschwerlicher, lässt sich die Rechnung wie folgt durchführen.

Es seien c_0, x_0, μ_0, $\varkappa_0$ molare Konzentration, Alkoholysengrad, Ionenbeweglichkeit und spezifische Leitfähigkeit von Ammoniumazetat vor Zusatz von Essigsäure (oder Ammoniak) und c_1, x_1, μ_1, $\varkappa_1$ dieselben Grössen nach Zusatz von Essigsäure (oder Ammoniak) in einer Konzentration c_1'. μ_0 und μ_1 sind als die molaren Leitfähigkeiten des nicht alkoholysierten Ammoniumazetates zu verstehen, und $\varkappa_1'$ ist die für den viscositätsändernden Einfluss des Essigsäurezusatzes korrigierte Leitfähigkeit. Es gilt dann:

$$c_0 (1 - x_0) \mu_0 = 1000 \varkappa_0 \qquad (50)$$

$$c_1 (1 - x_1) \mu_1 = 1000 \varkappa_1'. \qquad (51)$$

Daraus erhält man:

$$\frac{1-x_0}{1-x_1} = \frac{\varkappa_0}{\varkappa_1'} \cdot \frac{c_1'}{c_0} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_0}. \qquad (52)$$

Zur Berechnung von $(1-x_0) : (1-x_1)$ nach dieser Formel sind $\varkappa_0/\varkappa_1'$ und c_1/c_0 aus den Versuchsdaten bekannt. μ_1/μ_0 kann in folgender Weise berechnet werden. Nimmt man vorläufig an, dass die Alkoholyse in den Versuchen mit den grössten Zusätzen vollständig zurückgedrängt war, so kann aus diesen Versuchen die Ionenbeweglichkeit des nicht alkoholysierten Ammoniumazetates ermittelt werden.

Tabelle 13 enthält 5 solche Versuche. In der 5. und 6. Kolumne findet man die beobachteten und die nach der Interpolationsformel

$$\log \mu_{NH_4CH_3COO} = 2{,}049 - 0{,}911 \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}} \qquad (53)$$

berechneten Werte zusammengestellt (C_{Ion} = Konzentration von Ammoniumazetat).

Tabelle 13.

Leitfähigkeit von Ammoniumazetat, dessen Alkoholyse durch Zusatz von Essigsäure oder Ammoniak zurückgedrängt worden ist, in Methylalkohol bei 18°.

Nr.	CH_3COONH_4 Mol/L	CH_3COOH Mol/L	NH_3	$\mu_{beob.}$	$\mu_{ber.}$
1 a	0,00825	0,0784		72,6	73,3
4 b	0,00888		0,0754	73,2	72,5
2 a	0,0473	0,0480		53,2	52,4
5 c	0,0803		0,0881	45,0	45,3
3 d	0,0890	0,500		43,1	43,9

Aus den Zahlen der Tabelle 13 sieht man, dass die Formel (53) die Messungen in brauchbarer Weise wiedergibt.

Aus (53) ergibt sich

$$\log \mu_1/\mu_0 = 0{,}911 \cdot \left(\sqrt[3]{c_0\,(1-x_0)} - \sqrt[3]{c_1\,(1-x_1)}\right) =$$

$$- 0{,}911 \cdot \sqrt[3]{c_1\,(1-x_1)} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{c_0\,(1-x_0)}{c_1\,(1-x_1)}} - 1\right). \qquad (54)$$

Mit guter Annäherung kann man für (54) setzen:

$$\log \mu_1/\mu_0 = 0{,}911 \cdot \sqrt[3]{c_1} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{x_0}{x_1'}} - 1\right). \qquad (55)$$

μ_1/μ_0 liegt ja bei den Versuchen nahe bei 1, und es handelt sich deshalb nur um die Berechnung eines kleinen Korrektionsgliedes.

Die nach (52) und (55) berechneten Werte von $(1-x_0):(1-x_1)$ sind in Tabelle 14 und 15 (5. Kolumne) aufgeführt.

Nach dem Massenwirkungsgesetzt gilt:

$$\frac{[NH_3]\,.\,[CH_3COOH]}{[NH_4^+]\,.\,[CH_3COO^-]} = K_A. \qquad (56)$$

Zwischen x_0 x_1 c_1 und c_1' ergibt sich daraus die folgende Relation

$$\frac{x_0^2}{(1-x_0)^2} = \frac{x_1\,(x_1 + c_1'/c_1)}{(1-x_1)^2} = K_A. \qquad (57)$$

Durch Probieren wurden die Werte von x_0 und x_1 bestimmt, die für $(1-x_0):(1-x_1)$ den richtigen Wert ergeben und (57) zufriedenstellen. Die in dieser Weise erhaltenen Alkoholysengrade sind in 6. und 7. Kolumne der Tabellen 14 und 15 zusammengestellt.

Tabelle 14.

Alkoholysengrad von Ammoniumazetat in Methylalkohol bei 18°. Nach Leitfähigkeitmessungen mit Zusatz von Essigsäure.

Nr.	CH_3COONH_4 Mol/L	CH_3COOH Mol/L	$\varkappa'$	$\frac{1-x_0}{1-x_1}$	x_0	x_1	$-\log K_A$	C_{Ion}
1	0,00904	0,000586						
1a	0,00825	0,0784	599	0,8935	0,1082	0,0015	1,834	0,0081

Nr.	CH_3COONH_4 Mol/L	CH_3COOH Mol/L	$\varkappa'$	$\frac{1-x_0}{1-x_1}$	x_0	x_1	$-\log K_A$	C_{Ion}
2	0,0500		0,00246					
2a	0,0473	0,0480	252	0,9224	0,085	0,008	2,142	0,046
3	0,1004		0,004031					
3a	0,0978	0,0234	4107	0,9506	0,067	0,019		
3b	0,0953	0,0461	4044	0,9450	0,065	0,010		
3c	0,0913	0,0817	3940	0,9376	0,068	0,006		
3d	0,0890	0,500	3838	0,9460	(0,055)	0,001		
				Mittel:	0,067		2,288	0,093

Tabelle 15.

Alkoholysengrad von Ammoniumazetat in Methylalkohol bei 18°. Nach Leitfähigkeitsmessungen mit Zusatz von Ammoniak.

Nr.	CH_3COONH_4 Mol/L	NH_3 Mol/L	$\varkappa$	$\frac{1-x_0}{1-x_1}$	x_0	x_1	$\log K_A$	C_{Ion}
4	0,00971		0,000621					
4a	0,00960	0,00979	681	0,8896	0,128	0,020		
4b	0,00888	0,0754	650	0,8682	0,134	0,003		
				Mittel:	0,131		1,644	0,0084
5	0,0893		0,00372					
5a	0,0870	0,0226	379	0,9508	0,065	0,017		
5b	0,0847	0,0446	374	0,9414	0,068	0,010		
5c	0,0803	0,0881	361	0,9348	0,070	0,005		
				Mittel:	0,068		2,274	0,083

Aus den angegebenen Werten für x_0 (Alkoholysengrad ohne Zusatz von Essigsäure oder Ammoniak) sieht man, dass die durch verschieden grosse Zusätze für eine und dieselbe Lösung bestimmten x_0-Werte gut übereinstimmen (3a, 3b, 3c, 3d; 4a, 4b; 5a, 5b, 5c). Nur der in 3d gefundene x_0-Wert stimmt nicht ganz mit den andern überein. In diesem Versuch ist aber auch der Essigsäurezusatz

bis zu 0,5 normal gestiegen. Bei der Mittelwertbildung ist dieser Versuch nicht mitgenommen.

In der 8. und 9. Kolumne von Tabellen 14 und 15 stehen die Werte von $-\log K_A$ und die entsprechenden Ionenkonzentrationen. Zur Berechnung von K_A hat man die Formel:

$$K_A = \left(\frac{x_0}{1-x_0}\right)^2. \qquad (58)$$

Wie man erwarten konnte, sind die Werte von $-\log K_A$ nicht konstant, sondern mit der Ionenkonzentration steigend. Die Versuche mit Essigsäurezusatz lassen sich durch die folgende Kubikwurzelformel gut wiedergeben:

$$-\log K_A = 1{,}48 + 1{,}80 \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}}. \qquad (59)$$

Hätte man auch die Versuche mit Ammoniakzusatz berücksichtigt, würde man die folgende Formel erhalten

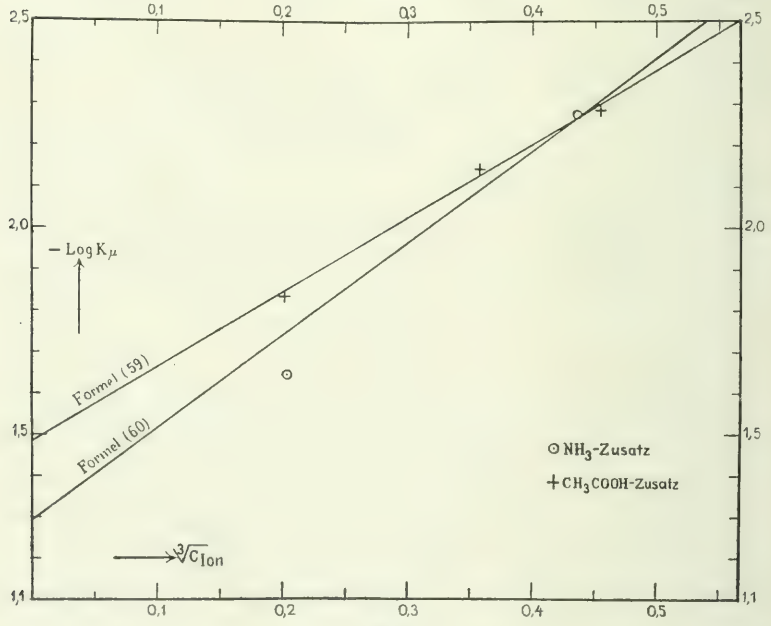

Fig. 2.

haben

$$-\log K_A = 1{,}29 + 2{,}38 \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}}. \qquad (60)$$

Da die Ammoniak-Versuche, besonders die in verdünnter Lösung, wegen Anwesenheit von Kohlendioxyd nicht so vertrauenswert sind wie die Essigsäure-Versuche, haben wir vorgezogen mit Formel (59) zu rechnen. In Figur 2 sind die gefundenen und die den Formeln (59) und (60) entsprechenden Werte eingezeichnet.

Für $-\log K_A^0$ werden wir 1,48 und für $k = k_{NH_4^+} + k_{CH_3COO^-}$, die Summe der Aktivitätskonstanten des Ammonium- und des Azetations, 1,80 setzen.

Bei den vorangehenden Berechnungen haben wir die Eigenleitfähigkeit der zugesetzten Essigsäure, bzw. Ammoniak vernachlässigt. Da Ammoniak in Methylalkohol weit mehr als Essigsäure dissoziirt ist, genügt es die Zulässigkeit dieser Vernachlässigung für Ammoniak zu zeigen.

Der Einfluss muss am grössten sein in Versuch 4b (0,00888 m NH_4CH_3COO + 0,0754 m NH_3). Setzt man hier die Dissoziationskonstante des Ammoniaks nach (41) und (42) zu $10^{-5,5}$, so berechnet sich die molare Konzentration der von NH_3 stammenden NH_4^+- und OCH_3^--Ionen zu 3.10^{-5}. Setzt man die Summe der Beweglichkeit dieser Ionen zu 100, so werden sie 3.10^{-6} zu der spezifischen Leitfähigkeit beitragen, d. h. nur ein halbes Procent. In den anderen Versuchen mit Ammoniak wird der Einfluss kleiner und in den Essigsäureversuchen ganz verschwindend. Dass 4a und 4b einen zu kleinen Wert für $-\log K_A$ ergeben haben, kann ausser durch die Anwesenheit von etwas Kohlendioxyd auch teilweise dadurch erklärt werden, dass die Eigenleitfähigkeit des Ammoniaks hier nicht ganz verschwindend klein gewesen ist. Bei diesen Versuchen ist jene Fehlerquelle nämlich am grössten.

Bei den Berechnungen wurde nicht berücksichtigt, dass der Zusatz von Essigsäure (bzw. Ammoniak) die Aktivitätskoeffizienten der Ionen ein wenig ändert, weil dadurch die Ionenkonzentration verschoben wird. Es ist daher nicht ganz exakt (57) zu benutzen. Versuchsweise wurde für die Ionenaktivitätskoeffizienten mit folgender Gleichung gerechnet $-\log f = 1 \cdot \sqrt[3]{C_{Ion}}$. Dabei wurde gefunden, dass es unnötig war die Änderung von f zu berücksichtigen, da sie nur eine Änderung von 1 oder 2 ‰ in dem Alkoholysengrad verursachte.

Kopenhagen, Chemisches Laboratorium der Kgl. tierärtzlichen und landwirtschaftlichen Hochschule.

Færdig fra Trykkeriet d. 17. Marts 1924.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **V**, 12.

DIE GRUPPE DER DREIDIMENSIONALEN GITTER-TRANSFORMATIONEN

VON

JAKOB NIELSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1924

Es ist bekannt, wie man die Transformationsgruppe des zweidimensionalen Gitters, also die (durch Spiegelung erweiterte, homogene) Modulgruppe, durch Angabe eines Systems erzeugender Operationen und definierender Relationen abstrakt charakterisieren kann. Dasselbe geschieht im Folgenden für das räumliche Gitter.

Um die im Folgenden benutzte, für den Beweis der Vollständigkeit eines Relationensystems für eine unendliche diskontinuierliche Gruppe oft anwendbare Methode am einfachsten Fall zu illustrieren, wird im § 1 das ebene Gitter ausführlich behandelt.

§ 1.

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}$$

die Matrix einer homogenen linearen ganzzahligen Substitution

$$x_i' = e_{i1}\, x_1 + e_{i2}\, x_2 \qquad (i = 1, 2)$$

mit der Determinante

$$D = |e_{ik}| = \pm 1\,,$$

und es sei bezeichnet

$$s_{ik} = e_{i1}\, e_{k1} + e_{i2}\, e_{k2} = s_{ki} \qquad (i, k = 1, 2).$$

Dann ist

$$D^2 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} = s_{11}\, s_{22} - s_{12}^2 = 1.$$

Nimmt man an, es sei gleichzeitig

$$2\,|s_{12}| < s_{11}$$
$$2\,|s_{12}| < s_{22},$$

so folgt wegen der Ganzzahligkeit der s_{ik} aus der letzten Gleichung

$$s_{11} = s_{22} = 1, \quad s_{12} = 0,$$

also dass M orthogonal ist. Bezeichnet $\mathfrak{v}_i$ den Vektor mit den Komponenten e_{i1}, e_{i2} und $|\mathfrak{v}_i| = \sqrt{s_{ii}}$ seine Länge, so erfüllt also ein transformiertes, nicht orthogonales Gitter mindestens eine der folgenden vier Ungleichungen:

$$|\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2| < |\mathfrak{v}_1|$$
$$|\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2| < |\mathfrak{v}_1|$$
$$|\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2| < |\mathfrak{v}_2|$$
$$|\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2| < |\mathfrak{v}_2|.$$

Im Einheitsparallelogramm eines nicht orthogonalen Gitters ist also die kürzeste Diagonale stets kürzer als die längste Seite. Als Erzeugende der gesuchten Transformationsgruppe G wählen wir daher zunächst die Substitutionen:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$O_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$12 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(12^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$21 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denn mittels 12 und 21 kann man eine beliebige Matrix M nach dem Vorstehenden auf eine orthogonale reduzieren, und jede orthogonale wird durch P, O_1, O_2 erzeugt. — Die Zahl $\sigma(M) = |\mathfrak{v}_1|^2 + |\mathfrak{v}_2|^2 = s_{11} + s_{22} = \Sigma e_{ik}^2$ kann als Mass für die »Schiefe« des Gitters dienen.

Wir benutzen folgende Bezeichnungsweise: Sind M und N die Matrizen zweier Substitutionen, so ist die Substitution MN mittels der Matrizenmultiplikation (Zeile von $M \times$ Spalte von N) erklärt. M_N bedeutet $N^{-1}MN$, und $M = N$ bedeutet die Relation $MN = NM$, oder anders geschrieben $M_N = M$. Endlich bezeichnet $\{M, N\}$ die aus M und N erzeugte Untergruppe, und $\{M, N\} = \{M', N'\}$ bedeutet, dass man zu irgend zwei Elementen E bezw. E' aus diesen beiden Gruppen stets zwei andere F und F' so finden kann, dass $EE' = F'F$ ist.

Aus der Definition der Erzeugenden bestätigt man unmittelbar die Richtigkeit folgender Relationen:

(1) $P^2 = 1$ (5) $12_P = 21$

(2) $O_1^2 = 1$ (6) $12_{O_1} = 12^{-1}$

(3) $O_{1P} = O_2$ (7) $12_{O_2} = 12^{-1}$

(4) $O_1 = O_2$ (8) $O_1 \cdot P \cdot 12 \cdot 21^{-1} \cdot 12 = 1.$

Es soll gezeigt werden, dass dies Relationensystem für G vollständig ist, d. h. dass jede in G gültige Relation zwischen den Erzeugenden eine formale Folge aus (1)—(8) ist.

Aus (2) bezw. (3) folgt formal durch Transformation mit P wegen (1):

(9) $$O_2^2 = 1$$

(10) $$O_{2P} = O_1.$$

(3) und (10) besagen, dass $P = \{O_1, O_2\}$, und wegen (4) kann dann jedes Element aus $\{P, O_1, O_2\} = \Omega$ in der Form

(11) $$O_1^\alpha O_2^\beta P^\gamma$$

geschrieben werden, wo α, β, γ wegen (2), (9) und (1) auf die Werte 0 und 1 beschränkt werden können. Die Normalform (11) stellt also jedenfalls nicht mehr als 8 Elemente

dar; da aber Ω seiner Bedeutung nach 8 orthogonale Transformationen enthält, ist (1)—(4) für Ω vollständig.

Aus (5), (6) und (7) folgt durch Transformation mit P wegen (3), (10) und (1):

$$21_P = 12 \tag{12}$$

$$21_{O_2} = 21^{-1} \tag{13}$$

$$21_{O_1} = 21^{-1}. \tag{14}$$

(5)—(7) und (12)—(14) sagen aus, dass $\Omega \rightleftarrows \{12, 21\} = Z$; aber (8) zeigt, dass G nicht das »direkte Produkt« von Ω und Z ist. ω bezw. ζ sei das allgemeine Zeichen für eine Operation aus Ω bezw. Z.

Aus (8) folgt durch Transformation mit P:

$$O_2 \cdot P \cdot 21 \cdot 12^{-1} \cdot 21 = 1. \tag{15}$$

Ein $\zeta = \Pi(12, 21)$, das Exponenten beiderlei Zeichens enthält, enthält zwei benachbarte Faktoren 12 und 21 mit entgegengesetzten Exponentenzeichen. Aus (8) oder (15) und danach (5)—(7), (12)—(14) bekommt man dann eine Umformung

$$\zeta = \omega \cdot \zeta'$$

wo ζ' mindestens einen Faktor weniger enthält. In endlich vielen Schritten kann man daher jedes Element g aus G in die »Normalform«

$$g = O_1^{\alpha} O_2^{\beta} P^{\gamma} \cdot \Pi(12, 21) \tag{16}$$

bringen, wo die Exponenten in Π entweder alle positiv oder alle negativ sind und $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1$. Treten in Π überhaupt von 0 verschiedene Exponenten auf, so ist $\sigma(\Pi) > 3$, da σ mit jedem neuen Faktor 12 oder 21 wächst, daher auch $\sigma(g) > 3$. Das Einheitselement wird daher

in (16) eindeutig dargestellt, indem α, β, γ und alle Exponenten in Π verschwinden müssen.

Ist nun

(17) $$\Pi_1 (P, O_1, O_2, 12, 21) = \Pi_2 (P, O_1, O_2, 12, 21)$$

eine in G gültige Relation, so forme man die linke Seite von

(18) $$\Pi_1 \Pi_2^{-1} = 1$$

in die Normalform (16) um, was einer formalen Anwendung von (1)—(8) entspricht. Wie gezeigt, wird (18) dadurch zu einer Identität, also folgt (17) formal aus (1)—(8), w. z. b. w.

Nachträglich kann man dann die Erzeugendenzahl reduzieren und z. B. P und 12, das weiterhin mit U bezeichnet sei, als Erzeugende wählen.[1] Denn aus (5), (8) und (3) ergeben sich

$$21 = U_P$$
$$O_1 = P U U_P^{-1} U$$
$$O_2 = U U_P^{-1} U P.$$

Das vollständige Relationensystem zwischen P und U erhält man nun, indem man in den übrigen fünf Relationen die gefundenen Ausdrücke für 21, O_1, O_2 einsetzt: (1) bleibt ungeändert, und man erhält aus (2)

(19) $$(PUPU^{-1}PU)^2 = 1$$

und aus (4), in der Form $(O_1 O_2)^2 = 1$ geschrieben:

(20) $$(UPU^{-1}PU)^4 = 1,$$

während (6) und (7) keine neuen Bindungen zwischen P und U mehr liefern. So führt z. B. (6), in der Form $(O_1 \cdot 12)^2 = 1$ geschrieben, zu der Relation

[1] Dass auch die erweiterte Modulgruppe durch nur zwei Substitutionen erzeugbar ist, findet sich übrigens m. W. in der Literatur nicht bemerkt.

$$(PUPU^{-1}PU^2)^2 = 1;$$

die linke Seite dieser Relation kann aber, identisch in $P = P^{-1}$ und U, in

$$(PUPU^{-1}PU)^2\,(PUPU^{-1}PU)^2_U$$

umgeformt werden, die Relation folgt also aus (1) und (19). Entsprechendes gilt für (7). Wir haben also dieses abstrakte Schema für G:

Erzeugende: P, U;

Definierende Relationen: $P^2 = (PUPU^{-1}PU)^2 = (PU^{-1}PU^2)^4 = 1.$

Will man die invariante Untergruppe $\overline{G}$ von G haben, die zu der Determinante $D = +1$ gehört, die also die Gitterorientierung erhält, so weiss man, wegen $D(U) = +1$, $D(P) = -1$, dass die Erzeugende P in den Elementen von $\overline{G}$ eine gerade Anzahl von Malen auftritt. Man kann also

$$V = U_P \ (= 21)$$

einführen und $\overline{G} = \{U, V\}$ schreiben. (19) und (20) ergeben die Relationen

$$VU^{-1}VUV^{-1}U = 1, \tag{21}$$

$$(UV^{-1}U)^4 = 1. \tag{22}$$

Um die Vollständigkeit eines Relationensystems für $\overline{G}$ auf die bekannte Vollständigkeit für G stützen zu können, ist zu berücksichtigen, dass die Transformation von (19) und (20) mit P zwar in G nichts Neues liefern kann, wohl aber möglicherweise in $\overline{G}$, das ja P nicht enthält. Die Ausrechnung ergibt zwei Relationen, die leicht aus (21) und (22) gefolgert werden, sodass in der Tat (21) und (22) für $\overline{G}$ voll-

ständig sind. — Führt man statt V als neue Erzeugende neben U

$$T = UV^{-1}U$$

ein, was wegen $V = UT^{-1}U$ möglich ist, so erhält man für $\overline{G}$ das Schema:

Erzeugende: T, U;
Definierende Relationen: $UT^{-1}UT^{-1}UT = T^4 = 1$.

Will man endlich von hier zu der Gruppe F der inhomogenen Modulsubstitutionen hinabsteigen, die in $\overline{G}$ als Faktorgruppe enthalten ist, so geschieht dies durch Hinzufügung der Relation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = T^2 = 1,$$

wonach man für F das übliche[1] Schema hat:

Erzeugende: T, U;
Definierende Relationen: $(UT)^3 = T^2 = 1$.

Diese Methode suchen wir nun im § 2 für das räumliche Gitter anzuwenden, indem wir zum Zwecke des Vollständigkeitsbeweises wieder die Konstruktion einer für das Einheitselement eindeutigen Normalform anstreben. Die Bezeichnungen werden im Wesentlichen ungeändert übernommen, um einen kurzen Ausdruck zu ermöglichen.

§ 2.

Es sei $M = (e_{ik})$ die Matrix einer ganzzahligen Substitution

$$x_i' = e_{i1}x_1 + e_{i2}x_2 + e_{i3}x_3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

[1] Vgl. F. Klein, Vorl. über die Theorie der ell. Modulfunktionen. Ausgearbeitet von R. Fricke. Teubner 1890. Bd. I pg. 452—454. U ist dort mit S bezeichnet.

mit der Determinante

$$D = |e_{ik}| = \pm 1.$$

Es bezeichne $\mathfrak{v}_i$ den Vektor mit den Komponenten e_{i1}, e_{i2}, e_{i3} und $|\mathfrak{v}_i|$ seine Länge, ferner

$$s_{ik} = e_{i1}e_{k1} + e_{i2}e_{k2} + e_{i3}e_{k3} = s_{ki},$$

$$\sigma(M) = |\mathfrak{v}_1|^2 + |\mathfrak{v}_2|^2 + |\mathfrak{v}_3|^2 = \sum_i s_{ii} = \sum_{i,k} e_{ik}^2.$$

Hülfssatz: Gilt für jedes i und $k \neq i$ die Ungleichung

$$2\,|s_{ik}| < s_{ii},$$

so ist M orthogonal.

Beweis: Wir können annehmen, es sei $s_{11} \leqq s_{22} \leqq s_{33}$, und setzen

$$s_{22} = s_{11} + h, \qquad h > 0$$
$$s_{33} = s_{22} + k, \qquad k \geqq 0.$$

Dann ist

$$1 = D^2$$
$$= |s_{ik}| = s_{11}s_{22}s_{33} - (s_{11}s_{23}^2 + s_{22}s_{13}^2 + s_{33}s_{12}^2) + 2s_{12}s_{13}s_{23}$$
$$> s_{11}(s_{11}+h)(s_{11}+h+k)$$
$$- \left[s_{11}\frac{(s_{11}+h)^2}{4} + (s_{11}+h)\frac{s_{11}^2}{4} + (s_{11}+h+k)\frac{s_{11}^2}{4}\right] - \frac{s_{11}^2(s_{11}+h)}{4}$$
$$= \frac{s_{11}}{4}(3s_{11}h + 3h^2 + 4hk + 3s_{11}k).$$

Daraus folgt $h = 0$ und (zunächst für $s_{11} > 1$, dann aber auch für $s_{11} = s_{22} = 1$) $k = 0$.

Die Zahl $s_{11} = s_{22} = s_{33}$ ist dann wegen

$$1 = s_{11}^3 - s_{11}(s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2) + 2s_{12}s_{13}s_{23}$$

ungerade, etwa $s_{11} = 2n+1$ und also $|s_{ik}| \leq n$ $(i \neq k)$, also

$$1 \geq (2n+1)^3 - (2n+1)\,3n^2 - 2n^3 = 9n^2 + 6n + 1,$$

also $n = 0$, also M orthogonal, w. z. b. w.

Für eine nicht orthogonale Matrix lässt sich also stets ein i und k so finden, dass eine der beiden Ungleichungen

$$|\mathfrak{v}_i + \mathfrak{v}_k| < |\mathfrak{v}_i|$$
$$|\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_k| < |\mathfrak{v}_i|$$

erfüllt ist. Das Grundparallelepiped eines schiefen Gitters ist also immer so schief, dass in mindestens einer Seitenfläche die kürzere Diagonale kürzer ist, als die längere Seite.

Mit ik sei die Substitution

$$x_i' = x_i + x_k$$
$$x_h' = x_h \qquad (h \neq i)$$

bezeichnet; dann lässt sich also jede Substitution durch fortgesetzte Prämultiplikation mit Faktoren $ik^{\pm 1}$ auf eine orthogonale reduzieren, und zwar so, dass dabei das »Schiefemass« $\sigma(M)$ monoton abnimmt.

Als Erzeugende der Gruppe Ω orthogonaler Substitutionen nehmen wir zunächst die folgenden:

$$P_{ik} = P_{ki}: \begin{cases} x_i' = x_k \\ x_k' = x_i \\ x_h' = x_h \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i \neq k \\ h \neq i,\ k \end{pmatrix}$$

$$O_i: \begin{cases} x_i' = -x_i \\ x_h' = x_h \end{cases} \qquad (h \neq i).$$

Zwischen diesen bestehen die Relationen[1]

[1] Verschieden bezeichnete Indices sind verschieden.

$$(A)\quad \begin{cases} (1) & P_{ik}^2 = 1 \\ (2) & P_{ik}P_{kl} = P_{il} \\ (3) & O_i^2 = 1 \\ (4) & O_i \rightleftarrows O_k \\ (5) & O_i P_{ik} = O_k \\ (6) & O_i P_{kl} = O_i. \end{cases}$$

(A) ist für Ω vollständig. Denn (5) und (6) besagen, dass

$$\{O_i\} \rightleftarrows \{P_{ik}\}.$$

Ist also wieder ω das Zeichen für ein Element aus Ω, so kann man umformen:

$$\omega = \Pi(O_i,\ P_{ik}) = \Pi_1(O_i)\cdot\Pi_2(P_{ik}).$$

$\Pi_1(O_i)$ kann wegen (3) und (4) in die Form

$$O_1^{\alpha_1}O_2^{\alpha_2}O_3^{\alpha_3} \qquad (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 = 0,\ 1)$$

gebracht werden. In $\Pi_2(P_{ik})$ kann die Faktorenzahl mittels (1) und (2) verkleinert werden, solange ein Faktor zweimal auftritt, und auch noch, wenn P_{12}, P_{13}, P_{23} je einmal auftreten; es bleibt also entweder kein Faktor übrig (1 Möglichkeit), oder ein Faktor (3 Möglichkeiten), oder 2 Faktoren; in diesem letzteren Fall kann man mittels (2) erreichen, dass der erste Faktor P_{12} ist. Jedes ω kann also

$$\omega_n = O_1^{\alpha_1}O_2^{\alpha_2}O_3^{\alpha_3}P_{12}^{\beta_1}P_{13}^{\beta_2}P_{23}^{\beta_3} \qquad (\alpha_i,\ \beta_i = 0,\ 1;\ \beta_2\cdot\beta_3 = 0)$$

geschrieben werden. Diese »Normalform« stellt 48 Elemente dar, ist also für Ω eindeutig, womit die Vollständigkeit von (A) erkannt ist.

Wir erzeugen nun die Gesamtgruppe G durch die ik, P_{ik} und O_i. Dann haben wir zunächst folgende weitere Relationen:

$$(B)\quad \begin{cases} (7) & ik_{P_{ik}} = ki \\ (8) & ik_{P_{il}} = lk \\ (9) & ik_{P_{kl}} = il \\ (10) & ik_{O_l} = ik, \quad \text{d. h. } ik \rightleftarrows O_l \\ (11) & ik_{O_i} = ik^{-1} \\ (12) & ik_{O_k} = ik^{-1}. \end{cases}$$

(B) besagt, dass $\Omega \rightleftarrows \{ik\}$. Jedes Element g aus G kann also geschrieben werden:

$$g = \omega \cdot \Pi(ik)$$

(G ist aber nicht das direkte Produkt von Ω und $\{ik\}$, wie (13) zeigt). Wir haben nun noch die Relationen

$$(C)\quad \begin{cases} (13) & O_i P_{ik} \cdot ik \cdot ki^{-1} \cdot ik = 1 \\ (14) & ik \rightleftarrows il \\ (15) & ik \rightleftarrows lk \\ (16) & ik \cdot kl \cdot ik^{-1} \cdot kl^{-1} \cdot il^{-1} = 1. \end{cases}$$

(16) sagt aus, dass il der »Kommutator« von ik und kl ist. Wegen (14) und (15) ist er mit beiden vertauschbar. Man sieht daher die Tragweite der Relation (16) am besten, wenn man sie in der Form schreibt:

$$(16\,a)\qquad ik \cdot kl = il \cdot kl \cdot ik = kl \cdot il \cdot ik = kl \cdot ik \cdot il.$$

Der Rest dieses § bringt den Nachweis dafür, dass (A), (B), (C) für G vollständig ist. Wir benutzen dazu, dass jedes Element g von G in der Form

$$g = \omega \cdot \Pi(ik)$$

geschrieben werden kann, und betrachten ein solches Produkt $p = \Pi(ik)$. Bezeichnen wir einen Augenblick die Faktoren desselben mit

$$p = F_1 \cdot F_2 \ldots F_r ,$$

so heisse die Folge positiver Zahlen ≥ 3:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma(F_1 \cdot F_2 \ldots F_r) \\ \sigma_2 &= \sigma(F_2 \cdot F_3 \ldots F_r) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_r &= \sigma(F_r) \\ \sigma_{r+1} &= \sigma(1) = 3 \end{aligned}$$

das »Diagramm« von p. Es hängt von der besonderen Wahl der Produktdarstellung von p ab. Aus dem Hülfssatz folgt, dass es für p eine Produktdarstellung

$$p = F_1' \cdot F_2' \ldots F_s' \cdot \omega$$

gibt, in der das Diagramm von $F_1' \cdot F_2' \ldots F_s' = p_n$ monoton abnimmt. Die Vertauschung eines ω mit einem $H(ik)$ mittels (B) lässt, da sie nur einer Umbenennung der Variablen entspricht, die Faktorenzahl und das Diagramm von $H(ik)$ ungeändert. Also lässt sich jedes g in der Form schreiben:

$$g_n = \omega_n \cdot p_n ,$$

wo ω_n die obige Normalform für ω ist. In dieser Normalform g_n ist das Einheitselement von G nur auf eine Weise darstellbar, denn wegen $\sigma(1) = 3$ kann p_n, dessen Diagramm monoton ist, überhaupt keinen Faktor enthalten, und in ω_n ist die 1 eindeutig. Unsere Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, zu zeigen, dass sich jedes p unter alleiniger Verwendung von (A), (B) und (C) in die Form $p = \omega \cdot p_n$ umformen lässt. Und hierzu genügt es, zu zeigen, dass, wenn das Diagramm von p nicht monoton ist und λ die grösste der vorkommenden Diagrammzahlen ist, eine aus (A), (B), (C) folgende Umformung $p = \omega \cdot p'$

gefunden werden kann, wo keine Diagrammzahl von p' grösser als λ ist und λ im Diagramm von p' einmal weniger vorkommt.

Ist das Diagramm von p nicht monoton, so gibt es einen Index h, sodass $\sigma_h < \lambda$, $\sigma_{h+1} = \lambda$ ist. Wir setzen $I = F_{h+2} F_{h+3} \ldots F_r$ und betrachten den Endbestandteil $\pi = F_h F_{h+1} I$ von p. Wir können $F_h = 12$ annehmen, da wir dies durch Umbenennung der Variablen (d. h. Transformation mit einem ω) stets erreichen können; enthält ferner F_{h-1} den Index 3, so können wir den Exponenten von F_{h+1} als $+1$ annehmen, da wir das durch Zeichenwechsel in x_3 (d. h. Transformation mit O_3) erreichen können, ohne $F_h = 12$ zu ändern; endlich können wir F_{h+1} als von 12^{-1} verschieden annehmen, da wir sonst einfach $F_h F_{h+1}$ streichen können. Somit haben wir für F_{h+1} folgende Möglichkeiten, die wir einzeln erledigen müssen:

1) 32 2) 12 3) 21 4) 21^{-1} 5) 13 6) 23 7) 31.

Wir setzen dabei $I = (e_{ik})$ und haben $\sigma(I) < \lambda$ wegen der Maximaleigenschaft von λ im Diagramm von p.

Fall 1) $\pi = 12 \cdot 32 \cdot I$.

Die beiden Faktoren wirken unabhängig von einander auf die Matrix $M(I)$ ein. Also ist $\sigma(12 \cdot I) < \sigma(I) \leq \lambda$. In

$$\pi_1 = 32 \cdot 12 \cdot I$$

tritt also λ einmal weniger auf. $\pi = \pi_1$ folgt aus (15).

Fall 2) $\pi = 12 \cdot 12 \cdot I$.

Hier soll also sein:

$$\sigma(12 \cdot I) > \sigma(I)$$

d. h.

$$\sum_i (e_{1i} + e_{2i})^2 \geq \sum_i (e_{1i})^2$$

oder

$$2 s_{12} + s_{22} \geq 0 \qquad (\alpha)$$

und ferner

$$\sigma(12\cdot 12\cdot I) < \sigma(12\cdot I)$$

d. h.

$$\sum_i (e_{1i}+2e_{2i})^2 < \sum_i (e_{1i}+e_{2i})^2$$

oder

$$2s_{12}+3s_{22} < 0. \qquad (\beta)$$

Die Ungleichung (β) steht im Widerspruch zu (α), wegen $s_{ii} > 0$, also ist der Fall 2) unmöglich.

Fall 3) $\pi = 12\cdot 21\cdot I$.

Hier soll sein:

$$2s_{12}+s_{11} \geqq 0 \qquad (\alpha)$$

und:

$$4s_{12}+3s_{11}+s_{22} < 0 \qquad (\beta)$$

(α) und (β) stehen im Widerspruch, der Fall ist also unmöglich.

Fall 4) $\pi = 12\cdot 21^{-1}\cdot I$.

Wir setzen $\pi_1 = P_{12}O_1\cdot 12^{-1}I$, wobei $\pi = \pi_1$ aus (13) folgt. Dann ist $\sigma(12^{-1}\cdot I) = \sigma(\pi) < \lambda$. Den Faktor $P_{12}O_1$ schafft man mittels (B) über den Anfangsbestandteil $F_1\cdot F_2 \ldots F_{h-1}$ von p hinweg nach vorne, ohne dass dabei an dem Diagramm dieses Teils etwas geändert wird. λ tritt dann einmal weniger auf. — Analog denke man sich stets im Folgenden bei Umformungen auftretende Faktoren ω über $F_1 \ldots F_{h-1}$ hinweg an den Anfang des Produkts geschafft.

Fall 5) $\pi = 12\cdot 13\cdot I$.

Die Voraussetzungen: $\sigma(13\cdot I) > \sigma(I)$, bezw. $\sigma(12\cdot 13\cdot I) < \sigma(13\cdot I)$ besagen, dass

$$\sum_i (e_{1i}+e_{3i})^2 > \sum_i e_{1i}^2 \text{ bezw. } \sum_i (e_{1i}+e_{3i}+e_{2i})^2 < \sum_i (e_{1i}+e_{3i})^2,$$

sodass wir für die s_{ik} folgende Ungleichungen haben:

$$2s_{13} + s_{33} \geqq 0 \qquad (\alpha)$$
$$2s_{12} + 2s_{23} + s_{22} < 0. \qquad (\beta)$$

Es sei $\pi_1 = 13 \cdot 12 \cdot I$. Die Umformung von π in π_1, deren Zulässigkeit aus (14) folgt, genügt unserer Forderung, λ einmal weniger hervorzurufen, falls $\sigma(12 \cdot I) < \sigma(13 \cdot I)$, also $2s_{12} + s_{22} < 2s_{13} + s_{33}$ ist. Wir nehmen also das Gegenteil an und notieren die Ungleichungen:

$$2s_{12} + s_{22} - 2s_{13} - s_{33} \geqq 0 \qquad (\gamma)$$
$$2s_{12} + s_{22} \geqq 0 \qquad (\delta) \text{ aus } (\gamma) + (\alpha)$$
$$s_{23} < 0. \qquad (\varepsilon) \text{ » } (\beta) - (\delta)$$

Die Umformung $\pi \rightarrowtail \pi_2 = 32^{-1} \cdot 13 \cdot 32 \cdot I$ mittels (16 a) genügt, falls $\sigma(32 \cdot I) < \sigma(I)$. Wir nehmen also das Gegenteil an und notieren:

$$2s_{23} + s_{22} \geqq 0 \qquad (\zeta)$$
$$s_{12} < 0. \qquad (\eta) \text{ aus } (\beta) - (\zeta)$$

$\pi \rightarrowtail \pi_3 = 23^{-1} \cdot 12 \cdot 23 \cdot I$ mittels (16 a) genügt, falls $\sigma(23 \cdot I) < \sigma(I)$; also:

$$s_{23} + s_{33} \geqq 0 \qquad (\vartheta)$$
$$s_{13} < 0. \qquad (\iota) \text{ aus } (\beta) - (\gamma) - (\vartheta)$$

Wir wenden nun den Hülfssatz auf die (z. B. wegen (ε)) nicht orthogonale Matrix I an. Die Differenz zweier Vektoren ist wegen (ε), (η), (ι) stets grösser als die einzelnen Summanden. Wir prüfen die Vektorsummen und finden:

$$|\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_3| \geqq |\mathfrak{v}_1| \text{ wegen } (\alpha)$$
$$|\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2| \geqq |\mathfrak{v}_1| \text{ » } (\delta)$$
$$|\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3| > |\mathfrak{v}_2| \text{ » } (\vartheta)$$
$$|\mathfrak{v}_3 + \mathfrak{v}_2| \geqq |\mathfrak{v}_3| \text{ » } (\zeta).$$

Also ist nach dem Hülfssatz entweder $|\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_2|$ oder $|\mathfrak{v}_3 + \mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_3|$.

Ist $|\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_2|$, also $2s_{12}+s_{11} < 0$, so genügt die Umformung:

$$\pi \rightarrowtail \pi_4 = O_2 P_{12} \cdot 12^{-1} \cdot 13 \cdot 23 \cdot 21 \cdot I,$$

denn nach Annahme ist $\sigma(21 \cdot I) < \sigma(I)$, ferner aber $\sigma(23 \cdot 21 \cdot I) < \sigma(21 \cdot I)$, denn $|\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_3| < |\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_1|$ folgt aus

$$2s_{23}+2s_{13}+s_{33} < 0 \quad \text{aus } (\beta)-(\gamma);$$

wir haben also $\sigma(23 \cdot 21 \cdot I) < \sigma(I)$, und da die erste und dritte Zeile der Matrix noch ungeändert sind, folgt $\sigma(13 \cdot 23 \cdot 21 \cdot I) < \sigma(13 \cdot I) = \lambda$; und endlich ist $\sigma(12^{-1} \cdot 13 \cdot 23 \cdot 21 \cdot I) = \sigma(\pi_4) = \sigma(\pi) < \lambda$. Es ist noch zu zeigen, dass $\pi = \pi_4$ aus (C) folgt. Es ist

$$\pi_4 \underset{(14)}{=} O_2 P_{12} \cdot 12^{-1} \cdot 13 \cdot 21 \cdot 23 \cdot I \underset{(16\,a)}{=} O_2 P_{12} \cdot 12^{-1} \cdot 21 \cdot 13 \cdot I$$
$$\underset{(13)}{=} 12 \cdot 13 \cdot I = \pi,$$

wobei unter dem Gleichheitszeichen jedesmal die verwendete Relation angegeben ist; (13) ist dabei in der Form

$$(13\,a) \qquad O_k P_{ik} \cdot ik^{-1} \cdot ki \cdot ik^{-1} = 1$$

verwendet, die aus (13) durch Transformation mit O_i unter Benutzung von (A) und (B) hervorgeht.

Also sei $|\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_1| > |\mathfrak{v}_2|$ angenommen, und also $|\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_3|$. Wir notieren:

$$2s_{12}+s_{11} \geqq 0 \qquad (\varkappa)$$
$$2s_{13}+s_{11} < 0 \qquad (\mu)$$
$$s_{33} > s_{11}. \qquad (\nu) \text{ aus } (\alpha)-(\mu)$$

$\pi_5 = O_3 P_{13} O_2 P_{23} \cdot 32^{-1} \cdot 13^{-1} \cdot 23 \cdot 31 \cdot I$ genügt, falls $\sigma(13^{-1} \cdot 23 \cdot 31 \cdot I) < \lambda$, d. h. falls $|\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_2|$; denn es ist $\sigma(31 \cdot I) < \sigma(I)$ nach (μ) und $\sigma(23 \cdot 31 \cdot I) < \sigma(13^{-1} \cdot 23 \cdot 31 \cdot I)$ nach (ν). $\pi = \pi_5$ folgt so:

$$\pi_5 \underset{(15)}{=} O_3 P_{13} O_2 P_{23} \cdot 32^{-1} \cdot 23 \cdot 13^{-1} \cdot 31 \cdot I \underset{(13\,a)}{=} O_3 P_{13} \cdot 32 \cdot 13^{-1} \cdot 31 \cdot I$$
$$\underset{(8),\,(10)}{=} 12 \cdot O_3 P_{13} \cdot 13^{-1} \cdot 31 \cdot I \underset{(13\,a)}{=} 12 \cdot 13 \cdot I = \pi.$$

Wir nehmen also $|\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_1| \geqq |\mathfrak{v}_2|$ an, also

$$2s_{23}+2s_{12}+2s_{13}+s_{33}+s_{11} \geqq 0. \qquad (\xi)$$

Dann genügt $\pi_6 = O_3 P_{13}\cdot 13^{-1}\cdot 12\cdot 32\cdot 31\cdot I$, denn $\sigma(31\cdot I) < \sigma(I)$ nach (μ), $\sigma(32\cdot 31\cdot I) < \sigma(31\cdot I)$ nach (β). Es ist also nur noch zu zeigen, dass $\sigma(12\cdot 32\cdot 31\cdot I) < \lambda$, also dass gilt:

(U) $\quad |\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2|+|\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2| < |\mathfrak{v}_3|+|\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_3|.$

Dazu wenden wir den Hülfsszatz auf die Matrix mit den Vektoren $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ und $\mathfrak{v}_3' = \mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2$ an. Es ist

$$\begin{aligned}
&|\mathfrak{v}_1 \pm \mathfrak{v}_2| \geqq |\mathfrak{v}_1| && \text{nach } (\delta) \text{ und } (\eta)\\
&|\mathfrak{v}_2 \pm \mathfrak{v}_1| > |\mathfrak{v}_2| && \text{» } (\varkappa) \text{ » } (\eta)\\
&|\mathfrak{v}_3' - \mathfrak{v}_2| > |\mathfrak{v}_3'| && \text{» } (\beta)\\
&|\mathfrak{v}_3' + \mathfrak{v}_2| > |\mathfrak{v}_3'| && \text{» } (\delta) \text{ » } (\zeta)\\
&|\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3'| > |\mathfrak{v}_2| && \text{» } (\delta) \text{ » } (\zeta) \text{ und } (\xi)\\
&|\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_3'| > |\mathfrak{v}_2| && \text{» } (\xi) \text{ » } (\beta)\\
&|\mathfrak{v}_3' - \mathfrak{v}_1| > |\mathfrak{v}_3'| && \text{» } (\mu) \text{ » } (\eta)\\
&|\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_3'| > |\mathfrak{v}_1|, && \text{» } (\zeta) \text{ » } (\nu)
\end{aligned}$$

also ist nach dem Hülfssatz

entweder $\quad |\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_3'| < |\mathfrak{v}_1|$

oder $\quad |\mathfrak{v}_3'+\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_3'|.$

Die erste Ungleichung besagt:

$$\begin{aligned}
0 &\geqq 3s_{11}+s_{22}+s_{33}+4s_{12}+4s_{13}+2s_{23}\\
&= [s_{11}+2s_{22}-s_{33}+4s_{12}+2s_{23}]+2\,[2s_{23}+2s_{12}+2s_{13}+s_{33}+s_{11}]\\
&\qquad -2\,[s_{22}+2s_{12}+2s_{23}]+s_{22}.
\end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung besagt:

$$\begin{aligned}
0 &> 3s_{11}+2s_{12}+2s_{13}\\
&= [s_{11}+2s_{22}-s_{33}+4s_{12}+2s_{23}]+[2s_{23}+2s_{12}+2s_{13}+s_{33}+s_{11}]\\
&\qquad -2\,[2s_{22}+2s_{12}+2s_{23}]+s_{11}.
\end{aligned}$$

In beiden Fällen folgt wegen (ξ) und (β)

$$0 > s_{11}+2s_{22}-s_{33}+4s_{12}+2s_{23},$$

welches mit der zu beweisenden Ungleichung (U) gleichbedeutend ist.

$\pi = \pi_6$ folgt so:

$$\pi_6 \underset{(16\,a)}{=} O_3 P_{13} \cdot 13^{-1} \cdot 31 \cdot 12 \cdot I \underset{(13\,a)}{=} 13 \cdot 12 \cdot I \underset{(14)}{=} 12 \cdot 13 \cdot I = \pi.$$

Damit ist der Fall 5 erledigt.

Fall 6) $\pi = 12 \cdot 23 \cdot I$. — Nach Voraussetzung ist:

$$\begin{aligned} &2s_{23} + s_{33} \geqq 0 && (\alpha)\\ &s_{22} + s_{33} + 2s_{23} + 2s_{12} + 2s_{13} < 0 && (\beta)\\ &s_{22} + 2s_{12} + 2s_{13} < 0. && (\gamma) \text{ aus } (\beta) - (\alpha) \end{aligned}$$

$\pi \backsim \pi_1 = 23 \cdot 13 \cdot 12 \cdot I$ mittels (16 a). Hier ist $\sigma(13 \cdot 12 \cdot I) < \sigma(I)$ nach (β). Also genügt π_1, falls $\sigma(12 \cdot I) < \sigma(23 \cdot I) = \lambda$. Wir nehmen also das Gegenteil an:

$$\begin{aligned} &2s_{12} + s_{22} - 2s_{23} - s_{33} > 0 && (\delta)\\ &2s_{12} + s_{22} \geqq 0 && (\varepsilon) \text{ aus } (\delta) + (\alpha)\\ &s_{13} < 0. && (\zeta) \text{ » } (\gamma) - (\varepsilon) \end{aligned}$$

$\pi \backsim \pi_2 = 23 \cdot 12 \cdot 13 \cdot I$ mittels (16a) genügt analog, falls nicht

$$\begin{aligned} &s_{13} - s_{23} \geqq 0 && (\eta)\\ &2s_{13} + s_{33} \geqq 0 && (\vartheta) \text{ aus } (\eta) \text{ und } (\alpha)\\ &s_{23} < 0. && (\iota) \text{ » } (\zeta) \text{ » } (\eta) \end{aligned}$$

$\pi \backsim \pi_3 = O_3 P_{23} \cdot 23^{-1} \cdot 13 \cdot 32 \cdot I$ genügt, falls nicht $\sigma(32 \cdot I) > \sigma(23 \cdot I)$, d. h.

$$\begin{aligned} &s_{22} \geqq s_{33} && (\varkappa)\\ &2s_{23} + s_{22} \geqq 0 && (\mu) \text{ aus } (\varkappa) + (\alpha)\\ &s_{12} < 0. && (\nu) \text{ » } (\beta) - (\mu) - (\vartheta) \end{aligned}$$

$\pi = \pi_3$ folgt so: $\pi_3 \underset{(15)}{=} O_3 P_{23} \cdot 13 \cdot 23^{-1} \cdot 32 \cdot I \underset{(9)\,(10)}{=} 12 \cdot O_3 P_{23} \cdot 23^{-1} \cdot 32 \cdot I \underset{(13a)}{=} 12 \cdot 23 \cdot I = \pi$. Wegen (ζ), (ι), (ν) ist die Differenz zweier Vektoren stets grösser, als der einzelne Summand. Ferner ist

$$\begin{aligned} |\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_3| &\geqq |\mathfrak{v}_2| && \text{nach } (\alpha)\\ |\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_2| &\geqq |\mathfrak{v}_3| && \text{» } (\mu)\\ |\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2| &\geqq |\mathfrak{v}_1| && \text{» } (\varepsilon)\\ |\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_3| &\geqq |\mathfrak{v}_1| && \text{» } (\vartheta), \end{aligned}$$

also ist nach dem Hülfssatz

$$\begin{aligned} &\text{entweder } |\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_2|\\ &\text{oder } \quad |\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_3|. \end{aligned}$$

Ist $|\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_2|$, also $|\mathfrak{v}_2| > |\mathfrak{v}_1|$, so genügt $\pi_4 = O_2 P_{12} \cdot 12^{-1} \cdot 23 \cdot 21 \cdot I \underset{(14)\,(13\,a)}{=} \pi$; denn $\sigma(21 \cdot I) < \sigma(I)$; und $\sigma(23 \cdot 21 \cdot I) < \sigma(\pi)$ wegen $|\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_2| \underset{(\alpha)}{\leqq} |\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_3|$. Ist $|\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_3|$, also $|\mathfrak{v}_3| > |\mathfrak{v}_1|$, so genügt $\pi_5 = O_2 P_{12} \cdot 12^{-1} \cdot 31^{-1} \cdot 23 \cdot 31 \cdot I \underset{(16\,a)}{=} \pi_4$; denn $\sigma(31 \cdot I) < \sigma(I)$, $\sigma(23 \cdot 31 \cdot I) < \sigma(31^{-1} \cdot 23 \cdot 31 \cdot I) < \sigma(\pi)$, weil

$$|\mathfrak{v}_1| < |\mathfrak{v}_3| \underset{(\varkappa)}{\leqq} |\mathfrak{v}_2| \underset{(\alpha)}{\leqq} |\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_3|.$$

Fall 7) $\pi = 12 \cdot 31 \cdot I$. — Nach Voraussetzung ist

$$\begin{aligned} 2s_{13}+s_{11} &\geqq 0 && (\alpha)\\ 2s_{12}+s_{22} &< 0 && (\beta)\\ s_{12} &< 0. && (\gamma) \text{ aus } (\beta) \end{aligned}$$

$\pi \rightarrowtail \pi_1 = O_2 P_{12} \cdot 12^{-1} \cdot 31 \cdot 21 \cdot I \underset{(15)}{(=} O_2 P_{12} \cdot 12^{-1} \cdot 21 \cdot 31 \cdot I \underset{(13\,a)}{=} 12 \cdot 31 \cdot I)$ genügt, ausser wenn

$$\begin{aligned} 2s_{12}+s_{11} &\geqq 0 && (\delta)\\ s_{11} &> s_{22}. && (\varepsilon) \text{ aus } (\delta)-(\beta) \end{aligned}$$

$\pi \rightarrowtail \pi_2 = 31 \cdot 32^{-1} \cdot 12 \cdot I \underset{(16\,a)}{(=} \pi)$ genügt, ausser wenn $\sigma(32^{-1} \cdot 12 \cdot I) > \lambda$, d. h.

$$\begin{aligned} 2s_{22}-s_{11}+2s_{12}-2s_{13}-2s_{23} &\geqq 0 && (\zeta)\\ s_{22}-2s_{23} &> 0. && (\eta) \text{ aus } (\zeta)+(\alpha)-(\beta) \end{aligned}$$

$\pi \rightarrowtail \pi_3 = 32^{-1} \cdot 31 \cdot 12 \cdot I \underset{(16\,a)}{(=} \pi)$ genügt, ausser wenn $\sigma(31 \cdot 12 \cdot I) \geq \lambda$, d. h.

$$s_{22}+2s_{12}+s_{23}\geqq 0 \qquad (\vartheta)$$
$$s_{23}>0 \qquad (\iota) \text{ aus } (\vartheta)-(\beta)$$
$$s_{13}<0. \qquad (\nu) \text{ aus } (\beta)-(\varepsilon)-(\zeta)-2\times(\iota)$$

$A=A_4=O_1P_{13}\cdot 31^{-1}\cdot 32^{-1}\cdot 13\cdot I$ $\overset{(14)}{(=O_1P_{13}\cdot 32^{-1}\cdot 31^{-1}\cdot 13\cdot I}$ $=12\cdot O_1P_{13}\cdot 31^{-1}\cdot 13\cdot I=\pi)$ genügt, ausser wenn $\overset{(8)\,(11)}{\sigma}(32^{-1}\cdot 13\cdot I)\geqq\lambda$; denn $\overset{(13\,a)}{\sigma}(32^{-1}\cdot 13\cdot I)>\sigma(13\cdot I)$ wegen (η). Also:

$$s_{33}+s_{22}-s_{11}-2s_{23}>0 \qquad (\varkappa)$$
$$s_{33}-2s_{23}>0. \qquad (\mu) \text{ aus } (\varkappa)+(\varepsilon)$$

Nun wende man den Hülfssatz auf die Matrix $12\cdot I$ mit den Vektoren $\mathfrak{v}_1'=\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_2$ und $\mathfrak{v}_3$ an. Es ist

$$|\mathfrak{v}_1'-\mathfrak{v}_2|>|\mathfrak{v}_1'| \quad \text{nach } (\beta)$$
$$|\mathfrak{v}_1'+\mathfrak{v}_2|>|\mathfrak{v}_1'| \quad \text{aus } (\zeta)+(\alpha)+2\times(\iota)$$
$$|\mathfrak{v}_2-\mathfrak{v}_1'|>|\mathfrak{v}_2| \quad \text{nach } (\varepsilon)$$
$$|\mathfrak{v}_2+\mathfrak{v}_1'|>|\mathfrak{v}_2| \quad \text{aus } (\delta)+(\zeta)+(\alpha)+2\times(\iota)$$
$$|\mathfrak{v}_2\pm\mathfrak{v}_3|>|\mathfrak{v}_2| \quad \text{nach } (\iota) \text{ und } (\mu)$$
$$|\mathfrak{v}_3\pm\mathfrak{v}_2|>|\mathfrak{v}_3| \quad \text{» } (\iota) \text{ » } (\eta)$$
$$|\mathfrak{v}_3+\mathfrak{v}_1'|>|\mathfrak{v}_3| \quad \text{aus } (\vartheta)+(\alpha)+(\iota)$$
$$|\mathfrak{v}_3-\mathfrak{v}_1'|>|\mathfrak{v}_3| \quad \text{» } (\zeta)+(\varepsilon)$$
$$|\mathfrak{v}_1'-\mathfrak{v}_3|>|\mathfrak{v}_1'|. \quad \text{» } (\mu)-2\times(\nu)$$

Also ist nach dem Hülfssatz $|\mathfrak{v}_1'+\mathfrak{v}_3|<|\mathfrak{v}_1'|$, d. h.

$$s_{33}+2s_{13}+2s_{23}<0 \qquad (\xi)$$
$$s_{33}+2s_{13}<0. \qquad (\varrho) \text{ aus } (\xi)-2\times(\iota)$$

Wegen (ϱ) ist $|\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_3|<|\mathfrak{v}_1|$. Wir setzen $\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_3=\mathfrak{v}_1''$ und wenden den Hülfssatz auf die Matrix mit den Vektoren $\mathfrak{v}_1''$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ an. Da $|\mathfrak{v}_2\pm\mathfrak{v}_3|>|\mathfrak{v}_2|$ und $>|\mathfrak{v}_3|$ ist, wie früher gezeigt, und $|\mathfrak{v}_1''-\mathfrak{v}_3|=|\mathfrak{v}_1|>|\mathfrak{v}_1''|$ ist, prüfen wir:

$$|\mathfrak{v}_1''+\mathfrak{v}_2|>|\mathfrak{v}_1''| \quad \text{aus } (\vartheta)+(\iota)$$
$$|\mathfrak{v}_1''-\mathfrak{v}_2|>|\mathfrak{v}_1''| \quad \text{» } (\eta)-2\times(\gamma)$$
$$|\mathfrak{v}_2-\mathfrak{v}_1''|>|\mathfrak{v}_2|. \quad \text{» } (\alpha)+(\mu)-2\times(\gamma)$$

Wenn nun $|\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_1''| \leq |\mathfrak{v}_2|$, also $|\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3| \leq |\mathfrak{v}_2|$ ist, so genügt:

$$\pi = \pi_5 = O_1 P_{13} \cdot 21^{-1} \cdot 32^{-1} \cdot 21 \cdot 13 \cdot I \underset{(16\,a)}{(=} O_1 P_{13} \cdot 32^{-1} \cdot 31^{-1} \cdot 13 \cdot I = \pi);$$

$\underset{(8)\,(11)\,(13\,a)}{}$ denn dann ist $\sigma(21 \cdot 13 \cdot I) < \sigma(13 \cdot I) < \sigma(I)$ und $\sigma(32^{-1} \cdot 21 \cdot 13 \cdot I) \leq \sigma(\pi_5) = \sigma(\pi)$; also sei $|\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_1''| > |\mathfrak{v}_2|$; ferner ist $|\mathfrak{v}_3 - \mathfrak{v}_1''| > |\mathfrak{v}_3|$ aus $(\varrho) - (\alpha)$. Also ist nach dem Hülfssatz

entweder $|\mathfrak{v}_1'' + \mathfrak{v}_3| < |\mathfrak{v}_1''|$ d. h. $3s_{33} + 2s_{13} < 0$ (ψ)

oder $|\mathfrak{v}_3 + \mathfrak{v}_1''| < |\mathfrak{v}_3|$ d. h. $s_{11} + 4s_{13} + 3s_{33} < 0$. (χ)

Da (ψ) aus $(\chi) - (\alpha)$ folgt, gilt ψ in beiden Fällen. Dann genügt π_5.

Denn es ist $\sigma(13 \cdot I) < \sigma(I)$, ferner $\sigma(21 \cdot 13 \cdot I) < \sigma(32^{-1} \cdot 21 \cdot 13 \cdot I)$, weil $|\mathfrak{v}_3| < |\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2|$, wie aus $(\alpha) + (\vartheta) + (\mu) - (\psi) + (\iota)$ folgt. Es ist also nur noch zu zeigen, dass $\sigma(32^{-1} \cdot 21 \cdot 13 \cdot I) < \lambda$, also $|\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3| + |\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2| < |\mathfrak{v}_1| + |\mathfrak{v}_2|$, also

$$s_{11} + s_{22} + s_{33} + 4s_{12} + 2s_{23} + 2s_{13} < 0$$

ist; und das folgt aus $2 \times (\beta) + (\psi) - (\varkappa)$.

— Damit ist die Vollständigkeit des Relationensystems (A), (B), (C) für die Gruppe G bewiesen. Im nächsten § wird dies Gruppenschema auf eine kürzere — dafür aber nicht symmetrische — Form gebracht.

§ 3.

Wir haben bisher als Erzeugende der Gruppe G die 12 Operationen P_{ik}, O_i und ik benutzt. Es ist nun leicht, die Erzeugendenzahl zunächst auf 4, dann weiter auf 3 Operationen zu verkleinern. Wir bezeichnen:

$$P = P_{12}, \qquad O = O_1,$$
$$Q = P_{23} \cdot P_{12}, \quad U = 12.$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
P_{23} &= QP \quad \text{wegen (1)}\\
P_{13} &= PQ \quad \text{» (2), (nämlich} = P_{23\,P12} = (QP)_P = PQ),\\
O_2 &= O_P \\
O_3 &= O_{PQ}
\end{aligned}
\Big\} \text{ » (5)}
$$

$$
\begin{aligned}
21 &= U_P \quad \text{» (7)}\\
32 &= U_{PQ} \quad \text{» (8)}\\
13 &= U_{QP} \quad \text{» (9)}\\
23 &= 13_{P12} = U_Q \quad \text{wegen (8)}\\
31 &= 32_{P12} = U_{PQP} \quad \text{» (9).}
\end{aligned}
$$

Also ist $G = \{P, Q, O, U\}$. Ein vollständiges Relationensystem zwischen diesen erhält man, wenn man die eben gefundenen Ausdrücke für die P_{ik}, O_i, ik in (A), (B), (C) einsetzt. Vereinfacht man das sich ergebende System nach Möglichkeit dadurch, dass man Relationen, die eine Folge der übrigen sind, fortlässt, so lässt sich das Ergebnis auf die folgende Form bringen[4]:

$$
G = \{P, Q, O, U\}^{(D)}
\begin{cases}
(D_1): \; P^2 = 1 \\
(D_2): \; (QP)^2 = 1 \\
(D_3): \; Q^3 = 1 \\
(D_4): \; O^2 = 1 \\
(D_5): \; O \rightleftarrows QP \\
(D_6): \; U \rightleftarrows O_{Q^2} \\
(D_7): \; U_O = U^{-1} \\
(D_8): \; U_{POP} = U^{-1} \\
(D_9): \; OPUU_P^{-1}U = 1 \\
(D_{10}): \; U \rightleftarrows U_{QP} \\
(D_{11}): \; U \rightleftarrows U_{PQ} \\
(D_{12}): \; UU_QU^{-1}U_Q^{-1} = U_{QP}.
\end{cases}
$$

Die Relation (D_9) zeigt, dass man O durch P und U ausdrücken kann:

[4] Ich unterdrücke die Zwischenrechnung und verweise auf die weitgehend analoge entsprechende Durchrechnung in meinem Aufsatz: »Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen«. Math. Ann. (Im Erscheinen).

$$(D_9): \quad O = PUU_P^{-1}U$$

unter Benutzung von (D_4). Substituiert man diesen Ausdruck für O in den übrigen Gleichungen, so erhält man, indem ausser (D_9) auch (D_7) und (D_8) entbehrlich werden, das folgende Schema:

$$G = \{P, Q, U\} \left| \begin{array}{ll} (E_1): \ P^2 = 1 & (E_4): \ (PUU_P^{-1}U)^2 = 1 \\ (E_2): \ (QP)^2 = 1 & (E_5): \ PUU_P^{-1}U \rightleftarrows QP \\ (E_3): \ Q^3 = 1 & (E_6): \ PUU_P^{-1}U \rightleftarrows U_Q \\ (E_7): \ U \rightleftarrows U_{QP} & \\ (E_8): \ U \rightleftarrows U_{PQ} & \\ (E_9): \ UU_Q U^{-1} U_Q^{-1} = U_{QP} & \end{array} \right. \quad (E)$$

Hier ist $D(P) = -1$, $D(Q) = +1$, $D(U) = +1$. Gittertransformationen mit Erhaltung der Orientierung, deren Gruppe $\overline{G}$ heissen möge, enthalten also die Erzeugende P eine gerade Anzahl von Malen. Also ist $\overline{G} = \{Q, U, Q_P, U_P\}$. Wegen (E_2) ist $Q_P = Q^{-1}$, also ist $\overline{G} = \{Q, U, U_P\}$. Zur Erzeugung dieser die Orientierung erhaltenden Gruppe $\overline{G}$, die in G invariant vom Index 2 enthalten ist, müssen wir also neben Q und U noch eine Operation mit Determinante $+1$ einführen. Es ist dazu am bequemsten, auf das Schema (D) zurückzugreifen, und dort O, für welches $D(O) = -1$ ist, durch die neue Erzeugende

$$T = PO, \qquad D(T) = +1,$$

zu ersetzen, was wegen $O = PT$ möglich ist. Wegen (D_4) ist dann $(PT)^2 = 1$, also $T_P = T^{-1}$. Wegen (D_9) ist $T = UU_P^{-1}U$, also $U_P = UT^{-1}U$. Also ist $\overline{G} = \{Q, T, U\}$, da man Q_P, T_P und U_P durch Q, T, U ausdrücken kann, und $G = \{Q, T, U, P\}$ ist. (E_4) nimmt die Form

$$UT^{-1}UT^{-1}UT = 1$$

an, sodass wir $UT^{-1}U = U_T^{-1}$ und also $U_P = U_T^{-1}$ haben.

Das Schema für $G = \{Q, T, U, P\}$ zerfällt nun in zwei Teile, einen P enthaltenden Teil:

$$(F) \qquad P^2 = 1\,, \quad Q_P = Q^{-1}\,, \quad T_P = T^{-1}\,, \quad U_P = U_T^{-1}\,,$$

mittels dessen die Stellung der invarianten Untergruppe $\overline{G}$ innerhalb G gekennzeichnet wird, und das Schema für $\overline{G}$, das die übrigen aus (D) erhaltenen Relationen enthält. Man kann es hier auf folgende Form bringen:

$$\overline{G} = \{Q, T, U\} \quad (H) \left\{ \begin{array}{ll} (H_1): \; Q^3 = 1 & (H_4): \; (UT^{-1})^3 = T^2 \\ (H_2): \; T^4 = 1 & (H_5): \; U_{T_Q^2} = U^{-1} \\ (H_3): \; (QT)^2 = 1 & \\ \qquad (H_6): \; U_T \rightleftarrows U_Q & \\ \qquad (H_7): \; U_T \rightleftarrows U_{Q-1} & \\ \qquad (H_8): \; U U_Q U^{-1} U_Q^{-1} = U_{T_Q}. & \end{array} \right.$$

Man darf dies Schema einer schon in § 1 gemachten Bemerkung zufolge erst dann als das Schema für $\overline{G}$ ansprechen, wenn die Transformation der einzelnen Relationen mit P keine neuen liefert; (H) geht durch Transformation mit P mittels (F) in sich über.

Die Aeqvivalenz des Schemas $(F) + (H)$ für G mit dem in § 2 benutzten Schema (A) + (B) + (C), erkennt man übrigens, anstatt durch (D) zu gehen, leichter direkt, indem man formal definiert:

$$\begin{aligned} 12 &= U \\ 21 &= U_P \\ P_{12} &= P \\ O_1 &= PT \end{aligned}$$

und dann, ebenfalls per definitionem, der Transformation mit Q eine zyklische Permutation der Indizes in diesen Ausdrücken entsprechen lässt, z. B. $23 = U_Q$, $O_2 = (PT)_Q$

u. s. w. Dann ergeben sich die Relationen (1)—(16) durch leichte Rechnung aus (F) und (H).

Für das geometrische Studium der Gittertransformationen ist es natürlich ausreichend, sich mit der die Orientierung erhaltenden Gruppe $\overline{G}$ zu beschäftigen. Die geometrische Bedeutung der Erzeugenden geht aus den Matrizen hervor:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q ist also eine Drehung durch $\frac{2\pi}{3}$ um die Gerade $x = y = z$ und T eine Drehung durch $\frac{\pi}{2}$ um die z-Achse. Diese beiden erzeugen die orthogonale Gruppe $\overline{\Omega}$, die Oktaedergruppe; und (H_1), (H_2), (H_3) ist ein bekanntes Schema für diese Gruppe. U endlich ist die Affinität, welche durch die Substitution

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

bestimmt wird. Die Potenzen von U sind also alle verschieden, und das Mass und die Art der Verknüpfung von U mit den Drehungen Q und T wird durch die Gleichungen (H_4)—(H_8) vollständig beschrieben.

Zum Schluss sei eine Bemerkung über den Zusammenhang mit freien Gruppen angefügt. Seien a_1, a_2, a_3 die erzeugenden Operationen einer freien Gruppe Φ (ohne verbindende Relationen zwischen den a_i). Wir bezeichnen vier Isomorphismen von Φ mit sich selbst, wie folgt:

$$P: \begin{cases} a_1' = a_2 \\ a_2' = a_1 \\ a_3' = a_3 \end{cases} \qquad Q: \begin{cases} a_1' = a_2 \\ a_2' = a_3 \\ a_3' = a_1 \end{cases}$$

$$O: \begin{cases} a_1' = a_1^{-1} \\ a_2' = a_2 \\ a_3' = a_3 \end{cases} \qquad U: \begin{cases} a_1' = a_1 a_2 \\ a_2' = a_2 \\ a_3' = a_3 \end{cases}$$

Dann erzeugen diese die gesamte Gruppe der Selbstisomorphismen von Φ, $I_\Phi = \{P, Q, O, U\}$, und das Gruppenschema ist [5]:

$$I_\Phi = \{P,Q,O,U\}: \begin{cases} P^2 = 1 & U \rightleftarrows O_{Q^2} & U_{O_P} = U^{-1} \\ (QP)^2 = 1 & U \rightleftarrows U_O & OPU_O^{-1}U_P^{-1}U = 1 \\ Q^3 = 1 & U \rightleftarrows U_{OQP} & \\ O^2 = 1 & U \rightleftarrows U_{PQ} & \\ O \rightleftarrows QP & U U_Q U^{-1} U_Q^{-1} = U_{QP} & \\ O \rightleftarrows O_Q & & \end{cases}$$

Ist $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ein Isomorphismus von Φ, und bezeichnet e_{ik} die Exponentensumme von a_k in α_i, so ist (e_{ik}) eine Matrix mit Determinante ± 1, also in G. G ist also Faktorgruppe von I_Φ, und die zugehörige invariante Untergruppe I_Φ^0 von I_Φ ist die Gruppe derjenigen Isomorphismen, die zur Einheitsmatrix gehören. Nun geht das Schema (D) von G aus dem Schema von I_Φ durch Hinzufügung der einzigen Relation

$$U_O U = 1$$

hervor. $U_O U$ ist der Isomorphismus

$$U_O U: \begin{cases} a_1' = a_2^{-1} a_1 a_2 \\ a_2' = a_2 \\ a_3' = a_3 . \end{cases}$$

Dass $U_O U$ in G, nicht aber in I_Φ der Einheit entspricht, ist der Ausdruck dafür, dass die Variabeln unserer linearen

[5] Siehe die unter [4] zitierte Abhandlung.

Substitutionen, nicht aber die Erzeugenden a_i von Φ vertauschbar sind. Die obige Tatsache besagt nun, dass die zur Einheitsmatrix gehörige invariante Untergruppe I_Φ° durch alle Transformierten von $U_0 U$ mit beliebigen Elementen von I_Φ erzeugt wird.

Es scheint mir eine für die Grundaufgaben der allgemeinen Gruppentheorie bedeutungsvolle Frage zu sein, ob diese Tatsache unabhängig von der Beschränkung auf die Variablenzahl 3, für die sie hier allein bewiesen ist, ihre Gültigkeit bewahrt.

Kopenhagen, Oktober 1923.

Færdig fra Trykkeriet d. 13. Marts 1924.

BINDING LIST FEB 15 1929

Q
62
D28
bd. 5
Physical &
Applied Sci.
Serials

Danske videnskabernes
selskab, Copenhagen
Matematisk-fysiske
meddelelser

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

STORAGE